

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

29. Band. Heft 9

6. Dezember 1948

S. 385—432

Geschichte.

Lejeune, Albert: *Archimède et la loi de la réflexion*. Isis, Cambridge, Mass. 38, 51—53 (1948).

Verf. untersucht Schol. 7 zu Satz I der pseudo-Euklidischen Katoptrik (Opera VII, Leipzig 1895, S. 348 = Archimedes, Opera II, Leipzig 1913, S. 550), worin die Gleichheit zwischen Einfallswinkel und Austrittswinkel bei Spiegelung unter Berufung auf Archimedes summarisch so bewiesen wird: Wären die Winkel verschieden, so ergäbe sich bei Vertauschung von Lichtquelle und Auge ein Widerspruch. Er verweist auf die Parallelstellen in der Katoptrik von Heron, prop. 6 (Opera II, Leipzig 1900) und der Optik von Ptolemaeus (italienisch ed. Govi, Turin 1885, S. 61/62) und kommt zu dem (naheliegenden) Schluß, daß die mangelhafte Darstellung Schuld des Kompilators ist. Es genügt die Zusatzbedingung, daß der Glanzpunkt im Spiegel fest bleibt, um einen einwandfreien Beweis zu erhalten.

J. E. Hofmann (Tübingen).

Luckey, P.: *Die Ausziehung der n -ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik*. Math. Ann., Berlin 120, 217—274 (1948).

Verf. untersucht unter Heranziehung bisher unbekannter oder unvollständig ausgewerteter Quellen die Verfahren zur Berechnung der n -ten Wurzel sowie das Auftreten des binomischen Lehrsatzes in der islamischen Mathematik. — Es sind 2 Methoden zu unterscheiden, was bisher nicht immer klar herausgestellt wurde: 1. Die eine, die bei uns in den Rechenbüchern der Renaissance (z. B. bei Apian, Stifel) auftritt und die Verf. als „Verfahren der Renaissance“ bezeichnet, operiert mit der fertigen binomischen Entwicklung für beliebig hohe Exponenten. 2. Die andere ist die des Ruffini-Hornerschen Verfahrens zur numerischen Auflösung algebraischer Gleichungen im Sonderfall $x^n - q = 0$. Beispielsweise wäre für die

Kubikwurzel bei dreistelligem $x = a + b + c = \sqrt[n]{q}$ der Kern des Verfahrens im Falle 1. die Formel $q = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$ und im Falle 2. $q = a^3 + [3a^2 + (3a+b)b]b + [3a^2 + (3a+b)b + (3a+2b)b]c + [(3(a+b)+c)c]c$. — Beide Methoden werden vom Verf. nach ihrem mathematischen Gehalt mit modernen Mitteln eingehend untersucht, wobei sich die Hornerische Methode als das einfachere Mittel gegenüber der binomischen Formel erweist, deren Koeffizienten „durch das Hornerische Schema oder eine ihm äquivalente kombinatorische Betrachtung erst sukzessive erzeugt werden“. — Bekannt waren bisher außer Texten über die Quadratwurzel, bei der Methode 1. und 2. noch übereinstimmen, nur das Kubikwurzelverfahren bei an-Nasawī (Anfang 11. Jhdt.) sowie Angaben von al-Bīrūnī (973—1048) und 'Omar Haiyāmī (geb. um 1050) über von ihnen verfaßte, aber nicht erhaltene Abhandlungen über das Ausziehen von Kubik- und höheren Wurzeln. Verf. untersucht nach einer Berliner und Leidener Hs. die einschlägigen Stellen in dem „Schlüssel der Rechner über das Rechnen“ von al-Kāšī (Anfang 15. Jhdt. an der Sternwarte Ulug Begs). Al-Kāšī beschreibt ausführlich das Ausziehen der Wurzel für beliebig hohes n und gibt für $n = 5$ ein Beispiel, wobei sich zeigt, daß er nach dem Ruffini-Hornerschen Verfahren rechnet, wie schon 400 Jahre früher an-Nasawī bei der Kubikwurzel. Al-Kāšī behandelt auch die Wurzeln aus Sexagesimalzahlen und Näherungswerte irrationaler Wurzeln. Schließlich zeigt er aber auch, daß er die offenbar jüngere Methode der Renaissance und den binomischen Lehrsatz kennt. — Die bedeutsame, exakt belegte Arbeit des Verf., der die wichtigsten Stellen in Übersetzung darbietet und der, über

den Titel der Untersuchung hinausgehend, das Problem auch in der indischen, chinesischen und mittelalterlichen abendländischen Mathematik verfolgt, macht so recht klar, wie schwer es ist, die Frage nach der Entstehung (Verf. weist auf die iranische Wissenschaft hin) zu beantworten, solange nicht die zahlreichen in den Bibliotheken schlummernden arabischen und persischen Handschriften bearbeitet sind.

Kurt Vogel (München).

Karpinski, Louis C.: *Mathematics in Latin America*. Scripta math., New York 13, 59—63 (1947).

Verf. führt im Anschluß an seine *Bibliography of Mathematical Works printed in America through 1850*, Ann Arbor 1940, auf, was man über die ältesten Rechenmeister, Mathematiker und Astronomen in Lateinamerika und ihre Werke weiß. Neben verschiedenen Handelsarithmetiken (in Mexiko seit 1556 und in Lima seit 1597) erwähnt er das ziemlich selbständige Rechenbuch des J. J. de Padilla (Guatemala 1732). An der Universität Mexico finden wir 1637/68 den Astronomen Fr. D. Rodrigues (mathematischer Nachlaß ungedruckt) und seit 1672 Don C. S. Gongora, beide mit den besten Fachgenossen ihrer Zeit in Europa korrespondierend. An der Universität in Lima wirkt der österreichische Jesuit J. R. Coninkius (mißglückter Versuch der Winkeldreiteilung, Lima 1696) und der Dramatiker (Obras, Santiago 1937) P. P. Barnuevo (astronomische Kalender 1721/43). Modernere mathematische Werke treten erst seit dem 19. Jhd. in Lateinamerika auf.

J. E. Hofmann (Tübingen).

● Gerlach, Walther: *Die Quantentheorie*. Max Planck, sein Werk und seine Wirkung. Bonn: Universitäts-Verlag 1948. 36 S.

Gedenkrede anlässlich der Max-Planck-Gedächtnisfeier im Vortragssaal der Farbenfabriken Leverkusen. Es wird die Entwicklung der Quantentheorie von ihrem ersten Anfang bis zu den Unbestimmtheitsrelationen geschildert, teils allerdings in so gedrängter Form und trotzdem auf Einzelheiten eingehend, daß der Nichtphysiker wenig damit wird anfangen können. Wo es sich um Problemstellungen grundsätzlicher Art handelt, ist stets eingestreut die persönliche Stellungnahme von Planck. Ein vollständiges Verzeichnis der Veröffentlichungen Plancks, das als Anhang beigegeben ist, wird sicher vielen Lesern erwünscht sein.

R. Seeliger.

Milne, E. A.: Dr. H. W. Richmond. *Nature*, London 161, 877—878 (1948).

Analysis.

Mengenlehre:

Jonston, L. S.: Denumerability of the rational number system. *Amer. math. Monthly* 55, 65—70 (1948).

Eine Anordnung der rationalen Zahlen als Folge derart, daß zu jeder Ordnungszahl die zugehörige rationale Zahl und zu jeder rationalen Zahl ihre Ordnungszahl leicht aufgestellt werden kann.

H. Hornich (Wien).

Obreanu, F.: La puissance de certaines classes de fonctions. *Duke math. J.* 14, 377—380 (1947).

Mit Verwendung des Auswahlaxioms (Wohlordnung nach Zermelo) wird gezeigt: 1. Die Mächtigkeit der Menge der eindeutigen Abbildungen einer (unendlichen) Menge E auf sich selbst ist identisch mit derjenigen der Menge der eindeutigen Abbildungen von E in E und auch gleich derjenigen der Menge der Teilmengen von E ; 2. Die Mächtigkeit der in einem Intervall definierten reellen Funktionen, welche in jedem Teilintervall jeden reellen Wert annehmen (Beispiele von H. Lebesgue, 1904) ist \aleph (M. der Funktionenklasse). Wie bekannt, ist die Mächtigkeit der Menge der stetigen Funktionen c (M. des Kontinuums); dagegen zeigt Verf.: 3. Die Mächtigkeit der Menge der im Sinne von Darboux stetigen Funktionen

(Definition nach G. Darboux, 1875), welche in jedem Teilintervall jeden Zwischenwert annehmen, ist wieder \mathfrak{F} .

H. Hadwiger (Bern).

Allgemeine Reihenlehre:

Dvoretzky, A.: Sur les suites d'exposants à densité supérieure finie. C. r. Acad. Sci., Paris **225**, 481—483 und Correction. Ebenda, 1396 (1947).

S. Mandelbrojt [Sur une inégalité fondamentale, Ann. sci. Ecole norm. sup., III. s. **63**, 315 (1946)] hat darauf hingewiesen, daß neben der gewöhnlichen Dichtefunktion

$D(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{\lambda}$ einer monoton wachsenden Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ (wobei $N(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1$)

bedeutet) auch die mittlere Dichtefunktion

$$\bar{D}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda D(x) dx$$

für manche Anwendungen (z. B. Dirichletsche Reihen) Bedeutung hat. Verf. betrachtet Beziehungen zwischen $D^* = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} D(\lambda)$, $\bar{D}^* = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \bar{D}(\lambda)$ und

$$A^* = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log A(r)}{r}, \text{ wobei } A(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$$

gesetzt wird. Es werden folgende neue Ergebnisse ausgesprochen: 1. $D^* \leq e \bar{D}^*$;

2. $e C_1 \bar{D}^* \leq A^*$, wobei $C_1 = \max_{x>0} \frac{\log(1+x^2)}{x} = 0,804 \dots$; 3. die Laplace-

Transformierte $L(s)$ von $A(z)$ hat auf $|s| = A^*$ nur die zwei singulären Punkte $s = \pm iA^*$, vorausgesetzt, daß $0 < D^* < \infty$; 4. wird $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) \geq 1$ voraus-

gesetzt, so kann man 1. zu $\varphi(D^*) D^* \leq \bar{D}^*$ verfeinern, wobei $\varphi(t) = (1-t)^{(1-t)/t}$ gesetzt wurde.

A. Rényi (Budapest).

Netanyahu, E.: Sur les moyennes de la densité d'une suite d'exposants. C. r. Acad. Sci., Paris **225**, 518—520 (1947).

Verf. betrachtet die iterierten mittleren Dichtefunktionen einer monoton wachsenden Folge $\{\lambda_n\}$ von positiven Zahlen, definiert durch

$$D_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda D_{n-1}(x) dx; \quad D_0(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{\lambda}; \quad N(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1,$$

und beweist, daß, wenn $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} D_m(\lambda) = D_m$ für ein m existiert, auch $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} D_n(\lambda) = D_n$

für alle ganzen n existiert und $D_n = D_m$.

A. Rényi (Budapest).

Wintner, Aurel: A sequence of Weierstrassian summations. J. London math. Soc. **22**, 311—314 (1947).

Es sei allgemein $W_k(x) = e^{-x} \sum_{r=0}^k \frac{x^r}{r!}$ ($k > 0$) gesetzt. Dann heißt die Reihe

$$(1) \quad a_1 + a_2 + \dots$$

Weierstrass- k -summierbar [kurz: (W, k) -summierbar], falls $f_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n W_k(ns)$ (s reell)

für $s > 0$ konvergiert und für $s \rightarrow 0$ einen Limes besitzt. Diese Summation besitzt u. a. folgende Eigenschaften: 1. Ist die Reihe (1) (W, k) -summierbar, so ist sie ebenfalls $(W, k-1)$ -summierbar zu derselben Summe. 2. Ist (1) für ein m (C, m) -summierbar, so ist diese Reihe für jedes k (W, k) -summierbar zu demselben Wert.

Dinghas (Berlin).

Minakshisundaram, S. and C. T. Rajagopal: Postscript to a Tauberian theorem. Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 18, 193—196 (1947).

Zu einem in einer vorangehenden Note [Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 17, 153—161 (1946)] veröffentlichten Tauberschen Satz mit zweiseitiger Umkehrbedingung wird ein Analogon mit einseitiger Umkehrbedingung bewiesen. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit reellen Gliedern, $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n \rightarrow \infty$, $r > 0$ und

$$A(t) = \sum_{v=0}^t a_v (\lambda_n \leq t < \lambda_{n+1}), \quad A^r(\omega) = r \int_0^{\omega} (\omega - t)^{r-1} A(t) dt.$$

Aus $A^r(\omega) = O[\Phi(\omega)]$ für $\omega \rightarrow \infty$, $a_n = O_R[\vartheta(\lambda_n)]$ für $n \rightarrow \infty$ und einer Voraussetzung über das Wachstum von

$$\sum_{v=1}^n (|a_v| + a_v) \lambda_v^k (\lambda_v - \lambda_{v-1})^{1-k} \quad (n \rightarrow \infty)$$

für ein $k > 1$ wird auf $A(\lambda_n) = O[\vartheta(\lambda_n)]$ für $n \rightarrow \infty$ geschlossen. Dabei müssen die positiven Funktionen $\Phi(x)$ und $\vartheta(x)$ von $x > 0$ noch gewissen Bedingungen genügen. Die Voraussetzung $a_n = O_R[\vartheta(\lambda_n)]$ läßt sich durch eine Voraussetzung über die Folge λ_n ersetzen. Beim Beweis wird an die frühere Note angeschlossen. Meyer-König.

Northcott, D. G.: Abstract Tauberians theorems with applications to power series and Hilbert series. Duke math. J. 14, 483—502 (1947).

Taubersche Sätze über die Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes werden übertragen auf den Fall, daß die Koeffizienten der betrachteten Potenzreihe Elemente eines vollständigen metrischen linearen Raumes \mathfrak{S} im Sinne von G. Banach sind. Es seien α_n und ζ in \mathfrak{S} gelegen. (I) Aus $\|\alpha_n\| = O(n^{a-1})$ für ein $a > 0$ und

$$(1-x)^a \sum_{n=0}^{\infty} x^n \alpha_n \rightarrow \zeta \text{ für } x \rightarrow 1-0 \text{ folgt } n^{-a}(\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n) \rightarrow (1/\Gamma(a+1))\zeta$$

für $n \rightarrow \infty$. (II) Aus $\|\alpha_n\| = O(1/n)$ und $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \alpha_n \rightarrow \zeta$ für $x \rightarrow 1-0$ folgt

$$(\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n) \rightarrow \zeta \text{ für } n \rightarrow \infty. \text{ (I) und (II) ließen sich aus einem Satz von E. Hille [Trans. Amer. math. Soc. 57, 246—269 (1945), Theorem 2] ableiten.}$$

Verf. gibt jedoch direkte Beweise mit Hilfe der durch Hardy, Littlewood, Karamata und Wiener bekannten Technik. Aus (II) ergibt sich schnell der folgende Satz über Potenzreihen mit komplexen Koeffizienten: (III) Es sei $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $s_n(x) = \sum_{v=0}^n a_v x^v$; aus $a_n = O(n^{1/p-1})$ für ein $p \geq 1$ und $\int_0^1 |s(x)|^p dx < \infty$

folgt $\int_0^1 |s_n(x) - s(x)|^p dx \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. — Sodann untersucht Verf. die Konvergenz der Hilbertschen Doppelreihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a_{\mu} a_v}{\mu + v + 1} = \lim_{m, n \rightarrow \infty} A_{m, n}; \quad A_{m, n} = \sum_{\mu=0}^m \sum_{v=0}^n \frac{a_{\mu} a_v}{\mu + v + 1}$$

(a_n reell; $m, n \rightarrow \infty$ bedeutet, daß m und n unabhängig voneinander gegen ∞ streben). Bekanntlich ist $A_{m, n}$ konvergent, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ konvergiert. Mit Hilfe des

Falles $p = 2$ von (III) beweist Verf.: (IV) $\lim_{m, n \rightarrow \infty} A_{m, n} = I$ mit $I = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^2 dx$,

wenn $a_n = O(n^{-1/2})$. Dabei kann I endlich oder $I = +\infty$ sein. Beide Fälle kommen vor, dagegen ist unbestimmte Divergenz von $A_{m, n}$ nicht möglich. (IV) ist der Fall $p = 1$ des folgenden, wesentlich komplizierter zu beweisenden Satzes (V): Unter der Voraussetzung $a_n = O(n^{1/2} \gamma^{-1})$ für ein $\gamma > 0$ ist

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{\mu=0}^m \sum_{v=0}^n \frac{a_{\mu} a_v}{\mu + v + 1} = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^1 (1-x)^{\gamma-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^2 dx.$$

Meyer-König (Stuttgart).

Schweitzer, Miklós: Sur les produits infinis et le théorème d'Abel. Acta Univ. Szeged, Acta Sci. math. **11**, 139—146 (1947).

Aus $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ folgt nach dem Abelschen Grenzwertsatz $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow s$ für $x \rightarrow 1-0$. Im Gegensatz dazu folgt nach G. H. Hardy [Proc. London math. Soc., II. s. **7**, 40—48 (1909)] aus $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = p$ weder $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n x) \rightarrow p$ noch $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n x^n) \rightarrow p$ für $x \rightarrow 1-0$. Verf. stellt nun die Frage, bei welchen Exponentenfolgen k_n (k_n ganz, ≥ 1) sich der Abelsche Satz auf die Produkte $\prod (1 + a_n x^{k_n})$ übertragen läßt, und gelangt zu der folgenden Antwort. Für die Folge k_n natürlicher Zahlen sei $k_1 \leq k_2 \leq \dots$; dann und nur dann folgt stets aus der Konvergenz von $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_n) = p$ die Existenz des Grenzwertes $\lim_{x \rightarrow 1-0} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n x^{k_n})$ und seine Gleichheit mit p , wenn $(k_1 + k_2 + \dots + k_n)/k_n$ beschränkt ist. In Ergänzung dieses Resultates beweist Verf. noch den folgenden (elementaren) Tauberschen Satz: Ist $k_n \leq k_{n+1}$ ($k_n \geq 1$, ganz) und $(k_1 + k_2 + \dots + k_n)/k_n$ beschränkt, so folgt aus $a_n \rightarrow 0$ und $\lim_{x \rightarrow 1-0} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n x^{k_n}) = p \neq 0$, daß $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = p$. Meyer-König.

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Cheng, Min-Teh: Cesàro summability of orthogonal series. Duke math. J. **14**, 401—404 (1947).

Es sei (1) $\Phi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) eine Folge normierter orthogonaler Funktionen im Intervall (a, b) , d. h. es sei $\int_a^b \Phi_m(x) \Phi_n(x) dx$ gleich 1 für $m = n$ und gleich 0 für $m \neq n$. Es sei weiter A_n eine Folge reeller Zahlen. Ist (2) $\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 (\log n)^2 < \infty$, so konvergiert die Reihe (3) $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \Phi_n(x)$ fast überall in (a, b) [H. Rademacher, Math. Ann., Berlin **87**, 112—138 (1922); D. Menschoff, Fundam. Math., Warszawa **4**, 82—105 (1923)]. Wird (2) ersetzt durch (4) $\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 n^k < \infty$ für ein k mit $0 < k < 2$, so ist die Reihe (3) für jedes $\delta > 0$ fast überall in (a, b) C -summierbar von der Ordnung $-k/2 + \delta$ [A. Zygmund, Math. Z. **25**, 297—298 (1926)]. Ist $\Phi_n(x)$ die Folge der Funktionen $\pi^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos vx$; $\pi^{-\frac{1}{2}} \sin vx$ ($v = 1, 2, \dots$) und $a = -\pi$, $b = \pi$, so läßt sich das letzte Resultat verschärfen. Aus $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) n^k < \infty$ (a_n, b_n reell) folgt dann nämlich, daß $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ fast überall in $(-\pi, \pi)$ C -summierbar von der Ordnung $-k/2$ ist [M. Jakob, Proc. London math. Soc., II. s. **26**, 470—492 (1927)]. Dies ist im Fall $1 < k < 2$ enthalten in dem folgenden vom Verf. bewiesenen Satz: Sind die normierten orthogonalen Funktionen (1) gleichmäßig beschränkt und ist $\int_a^b \Phi_n(x) dx = 0$ für $n = 1, 2, \dots$, so folgt aus (4) für ein k mit $1 < k < 2$, daß die Reihe (3) fast überall in (a, b) C -summierbar von der Ordnung $-k/2$ ist. Beim Beweis wird ein Satz von S. Banach [Bull. Sci. math. **50**, 27—32 und 36—43 (1926)] benützt. Meyer-König (Stuttgart).

Cheng, Min-Teh: Summability factors of Fourier series at a given point. Duke math. J. **14**, 405—410 (1947).

Die im Sinne von Lebesgue integrierbare Funktion $f(x)$ besitze die Periode 2π und die Fourierreihe

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)$$

mit den Teilsummen $S_n(x)$. Die Stelle x werde festgehalten, und es sei für ein $\beta \geq 0$ bei $t \rightarrow +0$

$$(*) \quad \int_0^t |\Phi_x(u)| du = O\left(t \left(\log \frac{1}{t}\right)^\beta\right) \quad \text{mit} \quad \Phi_x(t) = \frac{1}{2} [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)].$$

Es handelt sich nun um die Reihen

$$(1) \quad \sum \frac{A_n(x)}{(\log n)^{1+\beta+\varepsilon}}; \quad (2) \quad \sum \frac{A_n(x)}{(\log n)^{1+\frac{1}{2}+\beta+\varepsilon}};$$

$$(3) \quad \sum \frac{A_n(x)}{n^{1-\alpha}(\log n)^\beta}; \quad (4) \quad \sum \frac{A_n(x)}{n^{1-\alpha}(\log n)^{1+\beta+\varepsilon}}.$$

Die Reihe (1) ist für $\varepsilon > 0$ und $\alpha > 1$ absolut C_α -summierbar; (2) ist für $\varepsilon > 0$ absolut C_1 -summierbar; (3) ist für $0 \leq \alpha < 1$ und $\gamma > \alpha$ absolut C_γ -summierbar; (4) ist für $\varepsilon > 0$ und $0 \leq \alpha < 1$ absolut C_α -summierbar. Verf. beweist die über die Reihe (2) gemachte Aussage. Dabei wird insbesondere die aus (*) hergeleitete Abschätzung

$$\sum_{v=0}^n |S_v(x) - f(x)| = O(n(\log n)^{\frac{1}{2}+\beta}) \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

benützt. Die übrigen Aussagen sind ähnlich zu beweisen wie im Falle $\beta = 0$, für welchen sie in einer noch erscheinenden Arbeit behandelt sind. Man vergleiche zu der behandelten Fragestellung B. N. Prasad [Proc. London math. Soc., II. s. 35, 407—424 (1933); dies. Zbl. 7, 160] und H. C. Chow [J. London math. Soc., II. s. 16, 215—220 (1941)].

Meyer-König (Stuttgart).

Anderson, Shirley K.: Definite divergence of the conjugate Fourier series. Duke math. J. 14, 803—805 (1947).

Es sei $f(x)$ eine mit 2π periodische, L -integrierbare Funktion und

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx)$$

die zu ihrer Fourierreihe konjugierte Reihe. Die zugehörige konjugierte Funktion wird durch

$$(2) \quad g(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \psi(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt \quad \text{mit} \quad \psi(t) = f(x+t) - f(x-t)$$

definiert. Über den Zusammenhang zwischen (1) und (2) zeigt Verf. in Verallgemeinerung bekannter Resultate von B. N. Prasad [Ann. Math., Princeton, II. s. 33, 771—772 (1932); dies. Zbl. 5, 249], A. F. Moursund [Duke math. J. 12, 515—518 (1945)] und M. L. Misra [J. London math. Soc. 10, 213—216 (1935)]: Gilt an einer Stelle x die Beziehung

$$\int_{\varepsilon}^{\delta} \left| \frac{\psi(t)}{t} - \frac{\psi(t+2\varepsilon)}{t+2\varepsilon} \right| dt = O(1) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0,$$

wo δ eine positive Konstante bedeutet, so ist an dieser Stelle die Reihe (1) dann und nur dann bestimmt divergent gegen $+\infty$ (oder $-\infty$), wenn dies für das Integral (2) zutrifft.

F. Lösch (Stuttgart).

Verblunsky, S.: A note on Tauberian theorems and harmonic functions. J. London math. Soc. 22, 210—216 (1947).

Die Note enthält ein Versehen und ist vom Verf. inzwischen zurückgezogen worden.

F. Lösch (Stuttgart).

Korevaar, J.: Ein elementarer Beweis eines Tauberschen Satzes für Lambertsche Reihen. I. und II. Simon Stevin wis. natuurr. Tijdschr. 25, 83—100; 101—114 (1947) [Holländisch].

Die Lambertsche Reihe $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n / (1 - x^n)$ konvergiere für $0 \leq x < 1$ und für ein $\alpha \geq 0$ strebe $(1 - x)^{\alpha+1} h(x) \rightarrow A \alpha \Gamma(\alpha + 1) \zeta(\alpha + 1)$ bei $x \rightarrow 1 - 0$ [$\alpha \zeta(\alpha + 1) = 1$ für $\alpha = 0$]; aus $a_n > -K n^{\alpha-1}$ (K von n unabhängig) folgt dann $n^{-\alpha} \sum_{r=1}^n a_r \rightarrow A$ für $n \rightarrow \infty$. Der Fall $\alpha = 0$ wurde von N. Wiener, der allgemeine Fall von S. Bochner [S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1933, 126—144 (1933); dies. Zbl. 6, 199] bewiesen. Verf. behandelt den Fall $\alpha > 0$ und gibt dafür unter ausführlicher Darlegung der Einzelschritte einen Beweis, der nicht von Fourierintegralen Gebrauch macht. Das Haupthilfsmittel zum Beweis ist der folgende Approximationssatz: Es sei $\varepsilon > 0$ und $F(x)$ stetig in $0 \leq x \leq 1$; dann gibt es für jedes $\beta > 1$ eine Linearkombination

$$P(x) = b_0 + (1 - x)^{\beta} \sum_{k=1}^m b_k x^{k-1} / (1 - x^k),$$

so daß $|F(x) - P(x)| < \varepsilon$ ist für $0 \leq x \leq 1$ [zum Fall $\beta = 1$ vgl. Verf., Proc. Akad. Wet. Amsterdam 49, 752—757 (1946)].

Meyer-König (Stuttgart).

Gavurin, M. K.: Über die Annäherung einer stetigen Funktion durch einen linearen Differentialoperator von einem Polynom. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 12, 15—30 (1948) [Russisch].

S. Bernstein [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 5, 15—42 (1941)] hat den folgenden Satz ausgesprochen: Bezeichnet man mit $D_k(Y)$ einen linearen Differentialoperator,

$$(1) \quad D_k(Y(x)) = \sum_{i=0}^k \varphi_i(x) Y^{(k-i)}(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

wobei vorausgesetzt wird, daß $|\varphi_0(x)| + |\varphi_1(x)| > 0$ und alle $\varphi_i(x)$ stetig sind im Intervalle (a, b) , nennt man ferner die Funktionen $D_k[P(x)]$, wobei $P(x)$ ein Polynom bedeutet, D_k -Polynome, so ist dafür, daß das System aller D_k -Polynome im Raume der in (a, b) stetigen Funktionen überall dicht sei, notwendig und hinreichend, daß $D_k(Y) = A(x)$ (2) für alle in (a, b) stetigen $A(x)$ eine reguläre Lösung besitzt; dabei wird eine Lösung von (2) regulär genannt, wenn Y in (a, b) stetige Ableitungen bis zur $(k-1)$ -ten Ordnung einschließlich besitzt, ferner in allen Punkten, wo $\varphi_0(x) \neq 0$ ist, auch $Y^{(k)}(x)$ existiert und stetig ist. Der Beweis von S. Bernstein stützt sich u. a. auf die Behauptung, daß, wenn (2) für ein bestimmtes $A_0(x)$ eine reguläre Lösung besitzt, $A_0(x)$ mittels D_k -Polynome gleichmäßig approximierbar ist. Verf. zeigt an Hand eines Beispiels, daß die letztere Behauptung nicht in voller Allgemeinheit gültig ist, daß aber die dadurch im Beweise von S. Bernstein entstehende Lücke durch gewisse Modifikationen des Beweises beseitigt werden kann.

A. Rényi (Budapest).

Spezielle Orthogonalfunktionen:

Gerominus, I.: The orthogonality of some systems of polynomials. Duke math. J. 14, 503—510 (1947).

Betrachtet werden Polynomsysteme $P_n(x) = \sum_{r=0}^n a_{n-r} b_r \omega_r(x)$, wo

$$\omega_r(x) = \prod_{k=1}^p (x - x_k), \quad r = 1, 2, \dots, n; \quad n = 1, 2, \dots; \quad P_0 = a_0 b_0.$$

Sie enthalten als Spezialfälle viele bekannte Polynomsysteme. Es wird die Be-

dingung dafür aufgestellt, daß das System $P_n(x)$ orthogonal im Sinne $\mathfrak{S}\{P_n(x)P_m(x)\} = h_n \delta_{nm}$, wo $h_n \neq 0$ und \mathfrak{S} ein lineares Funktional mit $\mathfrak{S}\{x^k\} = c_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) ist. Insbesondere wird der Fall betrachtet, daß sich die c_k aus einer Verteilungsfunktion $\sigma(x)$ gemäß $c_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k d\sigma(x)$ herleiten lassen. Für sie wird eine Treppenfunktion mit Sprungstellen bei x_1, x_2, x_3, \dots angegeben. Mehrere Beispiele werden ausführlich behandelt.

J. Meixner (Aachen).

Koschmieder, L.: Beispiele des Gebrauchs gewisser Ableitungsformeln von Liouville, Spitzer und Schlömilch. *Rev. mat. Hisp.-Amer.*, IV. s. 6, 9 S. (1947).

Verf. hat in früheren Arbeiten zu einer Reihe bekannter Ableitungsformeln für spezielle Funktionen (vom Typ der Rodrigueschen Darstellung der Legendreschen Polynome) Gegenstücke aufgestellt, bei denen nach dem Kehrwert oder dem Quadrat der unabhängigen Veränderlichen differenziert wird. Er findet jetzt, daß die auf den Kehrwert bezüglichen Formeln aus einer älteren, für jede genügend oft differenzierbare Funktion gültigen Formel von Spitzer und Schlömilch, nämlich der Formel $D_\xi^h z = (-1)^h x^{h+1} D_x^h (x^{h-1} z)$ ($\xi = x^{-1}$) bzw. einer naheliegenden mehrdimensionalen Verallgemeinerung gewonnen werden können. In ähnlicher Weise entspringen Formeln mit Ableitungen nach x^2 aus der allgemeinen Liouville'schen Beziehung $D_\xi^h z = 2^h D_x^{(h-1)/2} (x^{h/2} D_x^{(h-1)/2} z)$ (h ungerade, $\xi = \sqrt{x}$) und einer entsprechenden für gerade h , nebst ihrer Übertragung auf mehrere Veränderliche. So erhält man z. B. die bekannten Darstellungen der Hermiteschen Polynome durch verallgemeinerte Laguerresche $L_n^{(\alpha)}(x)$ mit ungeradem ganzzahligem α . Durch Verbindung beider Methoden folgen schließlich Formeln mit Ableitungen nach x^{-2} bzw. x^{-2} und y^{-2} .

Hermann Schmidt (Braunschweig).

Shanker, Hari: On integral representations for the product of two Whittaker functions. *J. London math. Soc.* **22**, 112—115 (1947).

Verf. verzeichnet zuerst die von anderen Urhebern angegebenen Integralausdrücke der in der Überschrift genannten Art. Dann fügt er ihnen die folgenden neuen hinzu

(1)
$$W_{\kappa, m}(ip) W_{\kappa, m}(-ip) = \frac{2 p^{\nu+2\beta+2\kappa}}{\Gamma(2\beta) \Gamma(2\nu+2\beta)} \int_0^\infty t^{\nu+2\beta-1} K_{2\nu}(2\sqrt{pt}) \cdot {}_4F_5\left(\frac{1}{2}-k+m, \frac{1}{2}-k-m, \frac{1}{2}-k, 1-k; 1-2k, \beta, \beta+\frac{1}{2}, \nu+\beta, \nu+\beta+\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}t^2\right) dt$$
 mit $\operatorname{Re} \beta > 0$, $\operatorname{Re}(\nu+\beta) > 0$ (darin bedeutet $K_{2\nu}$ die — vom Verf. mit $k_{2\nu}$ bezeichnete — abgewandelte Besselsche Funktion dritter Art). — Sonderfälle: I. $\beta = \frac{1}{2} - k - m$, $\nu = 2m$; statt ${}_4F_5$ zwei Besselsche Funktionen im Integranden. II. $\beta = \frac{1}{2} - k$, $\nu = 0$; statt ${}_4F_5$ ebenda zwei Funktionen $M_{m, -k}$. Mit einem anderen Ansatz für die Dingfunktion $f(p)$ als zu seiner operatorenrechnerischen Herleitung von (1) erhält Verf. eine Formel von Meijer [*Nieuw Arch. Wiskunde*, II. s. **18**, 10—39 (1936); dies. Zbl. **13**, 208].

L. Koschmieder (Graz).

Funktionentheorie:

Graetzer, H.: Note on power series. *J. London math. Soc.* **22**, 90—92 (1947).

Durch elementare Betrachtungen wird gezeigt, daß jede komplexe Zahl Nullstelle einer ganzen Funktion mit rationalen Koeffizienten ist und ferner, daß jede komplexe Zahl, deren Betrag kleiner als Eins ist, Nullstelle einer im ganzen Einheitskreis konvergenten Potenzreihe mit ganzrationalen Koeffizienten ist. Diese Ergebnisse verallgemeinern einen Satz von A. G. Walker [*J. London math. Soc.* **19**, 106—107 (1944)], der aussagt, daß jede reelle Zahl Wurzel einer ganzen Funktion ist, die durch eine Potenzreihe mit rationalen Koeffizienten dargestellt werden kann.

Th. Schneider (Göttingen).

Huber, Heinz: Ein Mittelwertsatz für Funktionen einer komplexen Veränderlichen. *Comment. math. Helvetici* **21**, 58—66 (1948).

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle $\mathfrak{S}: |z - z_0| < S$, telle que $f'(z)$ transforme \mathfrak{S} en un domaine convexe. Pour tout point z de \mathfrak{S} , il existe un $\xi = \xi(z)$ dans \mathfrak{S} et un seul, tel que $(f(z) - f(z_0))/(z - z_0) = f'(\xi)$; $\xi(z)$ est holomorphe dans \mathfrak{S} , et pour tout $z \in \mathfrak{S}$, $\xi(z)$ est contenu dans l'intersection des deux cercles passant par z et z_0 et tangents à \mathfrak{S} , et du cercle de centre $\frac{1}{2}(z + z_0)$, et de rayon $|z - z_0|^{2/2}S$.

J. Dieudonné (Nancy).

Turán, P.: On the gap-theorem of Fabry. *Hung. Acta Math.* **1**, 21—29 (1947).

Die Potenzreihe (1) $f(z) = \sum_{v=1}^{\infty} a_v z^{\lambda_v}$ besitze den Konvergenzradius 1. Ist

(2) $\lambda_{v-1}/\lambda_v \geq q > 1$, so ist $f(z)$ nach J. Hadamard nicht über den Einheitskreis hinaus analytisch fortsetzbar. Als den (bekannten) „wahren“ Grund hierfür stellt Verf. die unter der Voraussetzung (2) für reelles α gültige Ungleichung

$$(3) \quad \max_{0 \leq x \leq 2\pi} \left| \sum_{v=1}^n a_v e^{i\lambda_v x} \right| \leq C(q, \delta) \max_{\alpha \leq x \leq \alpha + \delta} \left| \sum_{v=1}^n a_v e^{i\lambda_v x} \right|$$

heraus. Die Nichtfortsetzbarkeit von (1) ist auch dann gewährleistet, wenn (2) durch die weniger fordernde Bedingung (4) $\lambda_{v+1} - \lambda_v \rightarrow \infty$ für $v \rightarrow \infty$ ersetzt wird. An die Stelle von (3) tritt dann die Ungleichung

$$(5) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{v=1}^n a_v e^{i\lambda_v x} \right|^2 dx < C(\Delta, \delta) \int_{\alpha}^{\alpha + \delta} \left| \sum_{v=1}^n a_v e^{i\lambda_v x} \right|^2 dx,$$

die gilt, wenn $\lambda_{v+1} - \lambda_v \geq \Delta$ für $v = 1, 2, \dots, n-1$ ist [N. Wiener, *Ann. Scuola norm. sup. Pisa*, II. s. **3**, 367—372 (1934); dies. *Zbl.* **10**, 28; N. Wiener und R. E. A. Paley, *Fourier transforms in the complex domain*. New York 1934; dies. *Zbl.* **11**, 16]. Der Fabrysche Lückensatz besagt nun, daß man (4) noch weiter abschwächen kann zu (6) $\lambda_v/\nu \rightarrow \infty$. Verf. zeigt, wie sich in diesem Fall der Beweis mit Hilfe der für ganze λ_v gültigen Ungleichung

$$(7) \quad \max_{0 \leq x \leq 2\pi} \left| \sum_{v=n}^{\infty} a_v e^{i\lambda_v x} \right| \leq \left(\frac{48\pi}{\delta} \right)^n \max_{\alpha \leq x \leq \alpha + \delta} \left| \sum_{v=1}^n a_v e^{i\lambda_v x} \right|$$

führen läßt. Sodann wird die Ungleichung (7) abgeleitet. Auf ihren Zusammenhang mit Untersuchungen von J. E. Littlewood [*J. London math. Soc.* **12**, 217—221 (1937); dies. *Zbl.* **16**, 395] und noch zu veröffentlichenden Untersuchungen des Verf. wird hingewiesen.

Meyer-König (Stuttgart).

Goodstein, R. L. and T. A. A. Broadbent: The convergence of iterative processes. *J. London math. Soc.* **22**, 168—171 (1947).

Verff. geben folgende hinreichende Bedingungen für die Konvergenz des Rekursions-Prozesses $c_{n+1} = f(c_n)$, die das Verhalten von $f(z)$ und ihrer Derivierten nur im Punkte $z = c_0$ bzw. in seiner Umgebung allein vorschreiben: Bezeichnen wir $g(z) = z - f(z)$ [$c_{n+1} = c_n - g(c_n)$], so konvergiert c_n [und zwar ist der Grenzwert eine Wurzel der Gleichung $g(z) = 0$], falls a) $g(z)$ analytisch ist im Kreise $z - c_0 \leq \frac{|g(c_0)|}{1-s}$ ($0 < s < 1$) [sind $f(z)$ und $g(z)$ reell, so genügt die Existenz von $g''(z)$] und b) eine Nummer t existiert, so daß $0 < t < s < 1$, $|1 - g'(c_0)| < t$; $|g''(z)| < \frac{(s-t) \cdot (1-s)}{|g(c_0)|}$ sei im Kreise a). — Man erhält auch eine Abschätzung des Abweichens $|\tilde{c}_n - \lim c_n| \leq \frac{|g(c_0)| s^n}{1-s}$. — Der Beweis erfolgt leicht mittels induktiver Verifizierung der Behauptung: $|g(c_r)| \leq s^r |g(c_0)|$, falls $r \leq n$ ist, und c_r liegt dann im Kreise a). — Verff. wenden ihr Resultat auf die Newtonsche Approximation und auf ihre von Neville [On the solution of numerical functional equations, *Proc. London math. Soc.*, II. s. **14**, 308—326 (1915)] stammende Modifikation an. — Endlich verbessern sie die für die Konvergenz der Newtonschen Approximation erhaltenen

Bedingungen und Abschätzung, indem sie, ähnlich elementar wie im allgemeinen Fall, beweisen, daß der Prozeß $c_{n+1} = c_n - \frac{F(c_n)}{F'(c_n)}$ konvergiert, falls $0 < s < 1$,

$|F''(z)| < \frac{2s(1-s)}{1+s} \cdot \frac{|F'(c_0)|^2}{|F(c_0)|}$ im Kreise a), und zwar ist der Fehler, wenn man c_n

statt $\lim c_n$ nimmt: $|c_n - \lim c_n| < \frac{s^{2^n}}{s(1-s)} \frac{|F(c_0)|}{|F'(c_0)|}$. — Ref. meint, daß auch die

Untersuchung der Bedingungen für die Konvergenz der k -stufigen Reduktion $c_n = f(c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_{n-k})$ interessant wäre. *Aczél* (Budapest).

Pentikäinen, Teivo: Über stetige Funktionensysteme mit einem algebraischen Additionstheorem. *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, A I, Nr. 38, 48 S. (1947).

Von Myrberg [Preisschriften gekrönt und herausgegeben von der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig 50 (1922)] stammt die eingehendste Untersuchung über Systeme analytischer Funktionen einer Veränderlichen x , die ein algebraisches Additionstheorem erfüllen. Er stellte algebraische Bedingungen auf, die den Bau des Additionstheorems betreffen und notwendig und hinreichend sind für das Vorhandensein der zugehörigen Funktionen. Die Funktionen ergeben sich aus einem Satz Abelscher oder entarteter Abelscher Funktionen, indem man ihre Argumente linearen Funktionen von x gleichsetzt. Hier wird dieselbe Frage nach stetigen — nicht notwendig analytischen — Funktionen einer reellen Veränderlichen x gestellt. Auch hier müssen die Myrbergschen Bedingungen erfüllt sein. Das Additionstheorem wird daher durch analytische Funktionen erfüllt, sobald es durch stetige Funktionen erfüllt wird. Ist in einer endlichen Strecke eine stetige Lösung erklärt, so zerfällt die Strecke in endlich viele Teilstrecken, und in jeder von diesen ist die Lösung analytisch. Diese analytischen Stücke entstehen aus demselben System Abelscher Funktionen, und auch die Koeffizienten von x in den oben erwähnten linearen Funktionen sind bei allen Stücken dieselben. Die Freiglieder der linearen Funktionen und die Längen der Teilstrecken werden eingehend untersucht, Beispiele nichtanalytischer stetiger und auch unstetiger Funktionen mit algebraischem Additionstheorem angegeben. *H. Kneser* (Tübingen).

Macintyre, Sheila Scott: An upper bound for the Whittaker constant W . *J. London math. Soc.* 22, 305—311 (1947).

Man betrachte die Gesamtheit aller ganzen transzendenten Funktionen $f(z)$ mit $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{r} \leq 1$, welche die Eigenschaft haben, daß $f(x)$ sowie alle ihre Ableitungen in $|z| \leq \varrho$ mindestens eine Nullstelle besitzen, und es bezeichne W (Whittakersche Konstante) die untere Grenze aller ϱ , für welche die Klasse mindestens eine nicht verschwindende Funktion enthält. Es ist vermutet worden, daß der genaue Wert von $W = 2e^{-1} = 0,7357$ ist. In dieser Note wird die bisher bekannte beste Abschätzung $0,7199 < W < 0,7399$ durch die bessere $0,7199 < W < 0,7378$ ersetzt. *Dinghas* (Berlin).

Estermann, T.: Elementary evaluation of $\zeta(2k)$. *J. London math. Soc.* 22, 10—13 (1947).

Mittels einer Reduktionsformel läßt sich $\zeta(2k)$ aus $\zeta(2)$ berechnen. Hier wird ein Beweis dieser Formel gegeben, der nur absolut konvergente Doppelreihen benutzt. $\zeta(2)$ wird aus der Leibnizschen Reihe hergeleitet. *Hoheisel* (Köln).

Guinand, A. P.: Some formulas for the Riemann zeta-function. *J. London math. Soc.* 22, 14—18 (1947).

Mit Hilfe eines Paares von Kosinustransformierten werden Darstellungen von $\zeta(s)$ und $\zeta(i-s)$ gegeben, Spezialisierungen zeigen die Bedeutung. Es ergibt sich z. B. eine im kritischen Streifen $0 < \Re(s) < 1$ gültige Formel für

$$\zeta(s) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-s}}{1 + \left(\frac{n}{x}\right)^k} \quad (k \geq 1).$$

Hoheisel (Köln).

Túran, P.: On Riemann's hypothesis. Izvestija Akad Nauk SSSR., Ser. mat. **11**, 197—253 und russische Zusammenfassung 254—262 (1947).

Die Arbeit enthält die Beweise für einen (in unvollständigerer Form) schon im J. London math. Soc. **21**, 268 (1946) angezeigten Satz, der eine notwendige und hinreichende Bedingung für die quasi-riemannsche Vermutung gibt, nämlich dafür, daß die ζ -Funktion nur endlich viele Nullstellen in $\sigma \geq \theta$ ($\geq \frac{1}{2}$) hat. Diese Bedingung ist eine Abschätzung für die Summe

$$\sum_{N' < p < N''} e^{t + \log p} \quad \text{mit} \quad N \geq N'' > N' \geq \frac{1}{2} N \geq t^\alpha \geq a.$$

Die Beweismethode zeigt, wie scharf die Vinogradovschen Abschätzungen solcher Summen sind. Von entscheidender Bedeutung ist daneben das Resultat von Littlewood in J. London math. Soc. **12**, 217—221 (1937) [dies. Zbl. **16**, 395], das eine Abschätzung von \cos -Reihen gibt. *Hoheisel* (Köln).

Rutishauser, H.: Sur les suites et familles de fonctions méromorphes de plusieurs variables. C. r. Acad. Sci., Paris **224**, 1804—1806 (1947).

Verf. schließt in der Begriffsbildung an W. Saker [Comment. math. Helvetici **4**, 256—267 (1932); dies. Zbl. **5**, 70] an. Eine Folge \mathfrak{F} meromorpher Funktionen $f(w, z)$ heißt quasiregulär in einem Bereich \mathfrak{D} , wenn die Menge der irregulären Punkte der Folge eine analytische Fläche $V_{\mathfrak{F}}$ in \mathfrak{D} bildet. Entsprechend heißt eine Schar von Funktionen $f(w, z)$ in \mathfrak{D} quasinormal, wenn jede ihrer Folgen quasireguläre Teilfolgen aufweist. — Es werden nun Scharen von rationalen, analytischen und von meromorphen Funktionen betrachtet und Kriterien für normales bzw. quasinormales Verhalten aufgestellt. Auch werden Eigenschaften der Grenzfunktionen angeben. Dabei ist wichtig die Ordnung von $K_{\mathfrak{F}}$, das ist die kleinste Zahl n , so daß eine nicht in $K_{\mathfrak{F}}$ liegende Ebene $V_{\mathfrak{F}}$ innerhalb \mathfrak{D} höchstens n -mal schneidet. *Behnke* (Münster).

Rutishauser, H.: Sur les suites et familles de représentations analytiques du \mathbb{R}^4 . C. r. Acad. Sci., Paris **225**, 33—35 (1947).

Verf. überträgt die vorstehenden Resultate auf Mengen von analytischen Abbildungen vorgegebener Bereiche des projektiv abgeschlossenen Raumes zweier komplexer Veränderlichen. Wieder werden Kriterien dafür angegeben, daß eine Schar von Abbildungen eines vierdimensionalen Bereiches normal bzw. quasinormal ist. — Die Ergebnisse werden dann spezialisiert auf Scharen projektiver Abbildungen. Damit wird eine Verbindung mit den Arbeiten von Myrberg [s. Acta math., Uppsala **46**, 215—336 (1925)] hergestellt. *Behnke* (Münster).

Reutter, Fritz: Über ganze rationale Funktionen einer dualkomplexen Veränderlichen. Bull. École Polytechn. Jassy **2**, 273—289 (1947).

Die Arbeit knüpft an eine frühere Abhandlung des Verf. an [Über. Deutsche Math.-Verein. **51**, Abt. 1, 258—282 (1941); dies. Zbl. **26**, 119] und dehnt die dortigen Untersuchungen über ganze rationale Funktionen einer komplexen Variablen auf diejenigen einer dualkomplexen Variablen $z = x + \varepsilon y$ ($\varepsilon^2 = -1$) aus. Für die dualkomplexen, ganzen rationalen Funktionen gilt der Fundamentalsatz der Algebra nicht, eine Funktion n -ten Grades $f(z)$ hat i. A. n^2 Wurzeln $z_p = x_p + \varepsilon y_p$. Die Formel

$$f(z) = \prod_{r=1}^n (z - z_r)$$

ist nur bei geeignet gewählten Wurzeln z_r richtig; allgemein gilt

$$[f(z)]^n = \prod_{r=1}^{n^2} (z - z_r).$$

Verf. verallgemeinert unter gewissen Voraussetzungen einen Satz von Haenzel [S.-B. Berliner math. Ges. **27**, 16—19; 20—24 (1928); **28**, 31—45 (1929)] über das vollständige Nullstellenpolygon einer ganzen rationalen Funktion auf die dual-

komplexen Funktionen. Im zweiten Teil werden die Kovarianten dieser Funktionen untersucht. Verf. geht speziell auf die Jakobische und Hessesche Kovariante der kubischen und biquadratischen Funktion ein. Zum Schluß werden kurz analoge Sätze für ganze rationale Funktionen der Variablen $z = x + iy$ ($t^2 = 0$) erwähnt.

Kriszten (Zürich).

Gewöhnliche Differentialgleichungen:

Lehmann, N. Joachim: Die Stabilitätsfrage bei rückgekoppelten Verstärkern. I. Z. angew. Math. Mech. 28, 23—29 (1948).

Lehmann, N. Joachim: Die Stabilitätsfrage bei rückgekoppelten Verstärkern. II. Anwendungen und Ergänzungen zur Theorie im Teil I. (Insbesondere Behandlung von „mehrdimensionalen“ Verstärkern.) Z. angew. Math. Mech. 28, 59—64 (1948).

Verf. betrachtet im 1. Teil die Stabilität eines linearen Verstärkers mit Rückkopplung als Eigenschwingungsproblem. Die Theorie der Selbsterregung wird unter Beschränkung auf eine einzige Verstärkerkenngröße $u(t)$ erneut hergeleitet, was auf eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten führt: Der funktionale Zusammenhang zwischen Eingangsspannung $u_e(t)$ und Ausgangsspannung $u_a(u_e) = f(t)$ des Verstärkers ist gegeben durch

$$N u_e = M u_a \quad \text{mit} \quad N \equiv \sum_{r=0}^n C_r \frac{d^r}{dt^r}, \quad M \equiv \sum_{\mu=0}^m D_\mu \frac{d^\mu}{dt^\mu}, \quad (C_r, D_\mu = \text{const});$$

die zu untersuchende Stabilitätsbedingung lautet

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_a(u_e(t)) = 0.$$

Bei Hinzunahme einer Rückkopplung wird zwangsweise $u_e = u_a = u$, und man erhält die homogene DGL $N u = M u = 0$ und die charakteristische Gleichung $\sum_{r=0}^n C_r z^r - \sum_{\mu=0}^m D_\mu z^\mu = 0$. Das stabile Verhalten wird festgestellt unter den Annahmen, daß a) die DGL bekannt oder b) die Übersetzung des Verstärkers experimentell registriert sei, wobei die Fälle $m = n$ und $m < n$ getrennt mit Hilfe der Cauchyschen Nullstellenformel betrachtet werden. Der 2. Teil bringt als Beispiele einen mehrstufigen Verstärker nach Nyquist, den allgemeinsten Vier- und Dreipol, was die Erweiterung der Ergebnisse des 1. Teiles auf Systeme von DGLn. bedingt, und schließt mit einem Beispiel von Barkhausen. H. Bilharz (Freiburg i. Br.).

Zwinner, G.: Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: alcune applicazioni ai problemi ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII, s. 3, 242—247 (1947).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 29, 397) hat Verf. aus zwei Existenz- und Eindeigkeitskriterien für die Fixelemente gewisser Funktionaltransformationen, die als Kontraktionen bezeichnet werden können, zwei Sätze über das Problem von Niccoletti für partielle Differentialgleichungen von hyperbolischen Typus abgeleitet. In der vorliegenden Arbeit zeigt er, wie die erwähnten allgemeinen Kriterien auch für gewöhnliche Differentialgleichungen zu genaueren Ergebnissen als den für das Randwertproblem

$$(1) \quad \begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_1) = y(x_2) = \dots = y(x_n) = 0, \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n, \end{cases}$$

bekannten führen. — In dieser Note wird vorausgesetzt, daß die Funktion $f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ den Carathéodoryschen Bedingungen der Meßbarkeit bez. x und der Stetigkeit bez. der Gesamtheit der übrigen Veränderlichen im Streifen $a \leq x \leq b, |y_r| \leq +\infty$ genügt. Verf. beweist zwei Sätze, die sich auf Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Problems (1) beziehen, beide unter der Voraussetzung, daß die Funktion $f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ einer verallgemeinerten Lipschitz-

bedingung (mit von x abhängigen Koeffizienten) bez. der y_i in einem geeigneten endlichen Bereich genügt, und mit gewissen Einschränkungen für die Koeffizienten. In dem zweiten Satz können, im Gegensatz zum ersten, die Lipschitzkoeffizienten voneinander verschieden sein.

C. Miranda (Napoli).

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Mangeron, D. I.: Sur quelques propriétés des valeurs caractéristiques de spectres concernant certains problèmes aux limites. Bull. École Polytechn. Jassy **2**, 372—374 (1947).

Il problema ai limiti:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^{2n} u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \dots \partial x_n^2} - \lambda A(x_1, x_2, \dots, x_n) u = 0 & \text{in } D \\ u = 0 & \text{su } FD \end{cases}$$

essendo D il dominio rettangolare $x'_i \leq x_i \leq x''_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) presenta, come è noto, dopo i lavori di alcuni autori, fra i quali principalmente il Mangeron stesso (ad es. cfr. quest. Zbl. **5**, 357), una analogia con quello ai limiti per un'equazione ordinaria lineare per quanto riguarda l'esistenza degli autovalori. Più riposto è lo studio della variazione degli autovalori in funzione del dominio D , studio che dovrebbe rimpiazzare, nel caso in questione, i teoremi di oscillazione di Sturm per le equazioni lineari. — L'Autore annuncia in questa nota una formola che lega la variazione dell' n -simo autovalore per il problema (1) con le variazioni $\delta x'_i, \delta x''_i$ del dominio D . Come caso particolare trova una condizione sufficiente perchè l' n -simo autovalore raggiunga un estremo quando D varia, rimanendo uguale a se stesso. *C. Miranda.*

Zwirner, G.: Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: alcune applicazioni al problema di Niccoletti per le equazioni differenziali a derivate parziali di tipo iperbolico. Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. **3**, 44—49 (1947).

Verf. behandelt das Problem von Niccoletti:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \partial y^n} - f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q}, \dots\right), & p \leq m, q \leq n, p+q \leq m+n-1, \\ z(x_i, y) = 0, & i = 1, 2, \dots, m; z(x, y_j) = 0, & j = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Nachdem er zwei Prinzipien, die die funktional-analytische Formulierung (Hildebrandt u. Graves, Cacciopoli) der Methode der sukzessiven Approximation bilden, ausgesprochen hat, stellt er die Voraussetzungen dafür auf, daß das obige Problem unter diese allgemeinen Sätze fällt. Er gelangt zu zwei Sätzen, die beide voraussetzen, daß die Funktion

$$(2) \quad f(x, y, z_{00}, \dots, z_{pq}, \dots), \quad p = 0, 1, \dots, m, \quad q = 0, 1, \dots, n, \quad p+q \leq m+n-1,$$

in der Gesamtheit ihrer Argumente stetig ist. — Mit dem ersten Satz beweist er unter der Voraussetzung, daß es zwei positive Zahlen $K < 1$ und N gibt, für die $f(x, y, 0, 0, \dots, 0) \leq (1-K)N$ ist, und daß die Funktion (2) der Lipschitzbedingung

$$(3) \quad |f(x, y, z_{00}^{(1)}, \dots, z_{pq}^{(1)}, \dots) - f(x, y, z_{00}^{(2)}, \dots, z_{pq}^{(2)}, \dots)| \leq L \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n |z_{pq}^{(1)} - z_{pq}^{(2)}|$$

im Bereich

$$(4) \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad \sum_p \sum_q |z_{pq}| \leq N \sum_p \sum_q \frac{(b-a)^{m-p} (d-c)^{n-q}}{(m-p)!(n-q)!}$$

mit einer positiven Konstanten L von der Eigenschaft, daß

$$(5) \quad L \sum_p \sum_q \frac{(b-a)^{m-p} (d-c)^{n-q}}{(m-p)!(n-q)!}$$

ist, genügt, die Existenz und Eindeutigkeit des Problems (1). — In dem zweiten Satz gelingt es ihm, die Voraussetzungen (3) zu verbessern, indem er annimmt, daß die Lipschitzkonstanten nicht alle einander gleich sind. *C. Miranda.*

Cinquini-Cibrario, M.: Una proprietà delle superficie integrali delle equazioni non lineari di ordine n di tipo iperbolico. Atti Accad. naz. Lincei. Rend. (I. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 3, 49—55 (1947).

Wenn eine nicht-lineare partielle Differentialgleichung n -ter Ordnung von hyperbolischem Typus

$$(1) \quad F(x, y, z, p_{rs}) = 0, \quad r + s = 1, 2, \dots, n, \quad p_{rs} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^r \partial y^s},$$

gegeben ist, so läßt sich ein Ergebnis, das Verf. für $n = 2$ gefunden hat [Sopra alcune questioni alle equazioni del tipo iperbolico non lineari. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. s. 23, 1—23 (1944)] auf diesen Fall übertragen: Wenn $z = z(x, y)$ und $z = \zeta(x, y)$ zwei Integrale von (1) sind, die eine Kurve Γ gemeinsam haben, in deren Punkten sie sich von $(n - 2)$ -ter Ordnung berühren, wenn Γ eine Charakteristik, z. B. der Fläche $z = z(x, y)$, ist und wenn die Flächen in einem Punkte von Γ eine Berührung n -ter Ordnung haben, so ist Γ auch für die andere Integralfläche eine Charakteristik, und die beiden Flächen berühren einander in jedem Punkte von Γ von n -ter Ordnung. — Die Voraussetzungen, unter denen dieser Satz gilt, werden genau angegeben, und dieselbe Frage wird für den Fall, daß die Gleichung (1) quasi-linear ist, untersucht. *C. Miranda (Napoli).*

Koschmieder, Lothar: Eigenschaften harmonischer Reihen mit zeichenfester Summe in Räumen höherer Stufenzahl. Comment. math. Helvetici 21, 44—57 (1947).

Der Satz: „Entwickelt man in einem R_N eine in der Einheitskugel harmonischen und positive Funktion in eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} X_n(\theta_1, \dots, \theta_{N-2}, q)$ nach Polarkoordinaten, so sind die Abschnitte dieser Entwicklung in einer konzentrischen Kugel mit dem Radius $1/N$ sämtlich positiv“ ist für $N = 2, 3$ bekannt und wird hier für allgemeines N bewiesen. Ferner werden numerische Schranken für die X_n angegeben. Weitere Aussagen für die $(C, 1)$, $(C, 2)$, $(C, 3)$ -Mittel im R_{1N} . *H. Hornich (Wien).*

Bergman, Stefan: Functions satisfying certain partial differential equations of elliptic type and their representation. Duke math. J. 14, 349—366 (1947).

Verf. untersucht Paare von Funktionen $(\Phi(x, y); \Psi(x, y))$, die einem System von partiellen Differentialgleichungen

$$(1) \quad \Phi_x = l(x, y) \Psi_y; \quad \Phi_y = -l(x, y) \Psi_x \quad (l > 0)$$

genügen. Aus (1) folgt $L(\Phi) = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = (lg l)_x \Phi_x + (lg l)_y \Phi_y = 0$. Analog zur klassischen Theorie können für den mehrfach zusammenhängenden Bereich \mathfrak{B} Integrale erster, zweiter und dritter Gattung konstruiert werden. Im Folgenden gelingt es dem Verf., die klassischen Integralbeziehungen, die zwischen den Perioden der Normalintegrale und den Funktionswerten in gewissen Punkten bestehen, auf die verallgemeinerten Integrale auszudehnen.

Im zweiten Teil wird die Reihenentwicklung nach Orthogonalfunktionen untersucht. Im Gegensatz zu einer früheren Arbeit [Rec. math., Moscou, II. s. 2, 599—616 (1937)] wird die Orthogonalität nicht bezüglich der Berandung von \mathfrak{B} , sondern über \mathfrak{B} selbst ausgeführt. Die Funktionen $\Phi^{(\nu)}$, $\Phi^{(\mu)}$, für die $L(\Phi) = 0$, heißen bezüglich \mathfrak{B} und L orthogonal und normiert, wenn

$$\{\Phi^{(\nu)}, \Phi^{(\mu)}, L \mathfrak{B}\} = \iint_{\mathfrak{B}} [H \Phi^{(\nu)}, H \Phi^{(\mu)}] dx dy = \delta_{\nu\mu},$$

und es bedeutet $[S, T] = S_x T_x + S_y T_y - 4PST$; $H = l^{-1/2}$; $p = -\frac{1}{4H}(H_{xx} + H_{yy})$. Analog zum klassischen Fall (Bergman, Partial differential equations, Providence, 1941) gilt: Jede Lösung Φ von $L(\Phi) = 0$, für die $\{\Phi, \Phi, L \mathfrak{B}\} < \infty$, kann in eine im Innern von \mathfrak{B} absolut und gleichmäßig konvergente Reihe nach einem vollständigen Orthogonalsystem $\{\Phi^{(\nu)}\}$ entwickelt werden. *Kriszten (Zürich).*

Bergman, S. and M. Schiffer: A representation of Green's and Neumann's functions in the theory of partial differential equations of second order. Duke math. J. 11, 609—638 (1947).

Verff. betrachten die Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - P \varphi = 0, \quad P(x, y) > 0.$$

Durch die Definition eines skalaren Produktes

$$D \{ \varphi, \psi \} = \iint_B [\varphi, \psi] dx dy, \quad [\varphi, \psi] = \varphi_x \psi_x + \varphi_y \psi_y + P \varphi \psi$$

wird eine Metrik eingeführt. Eine Lösung φ von (1) gehöre zur Klasse A , falls $D \{ \varphi, \varphi \} < \infty$. Es sei ein vollständiges, orthogonales und normiertes Funktionensystem $\{ \varphi_r \}$ von Lösungen von (1) gegeben. Jede Lösung $\varphi(Z)$ ($Z = x; y$) aus A kann in eine in jedem inneren Teilbereich von B gleichmäßig konvergierende Reihe $\varphi(Z) = \sum A_r \varphi_r(Z)$ ($A_r = D \{ \varphi, \varphi_r \}$) entwickelt werden. Die Kernfunktion $K(Z, W) = \sum \varphi_r(Z) \cdot \varphi_r(W)$ konvergiert in jedem abgeschlossenen Teilbereich von B gleichmäßig, und es gilt für jedes φ aus A : $\varphi(Z) = D_w \{ K(Z, W), \varphi(W) \}$. Aus dieser Gleichung werden ein Extremal- und ein Eindeutigkeitssatz abgeleitet, die die Kernfunktion unabhängig von dem zugrunde gelegten Orthogonalsystem charakterisieren. Nach dem Greenschen Satz ist

$$D \{ f, \varphi \} = - \int_c f(W) \frac{\partial \varphi(W)}{\partial n_w} ds_w \quad (C: \text{Randkurve von } B),$$

speziell ist also

$$q(Z) = - \int_c q(W) \frac{\partial}{\partial n_w} K(Z, W) ds_w = - \int_c K(Z, W) \frac{\partial}{\partial n_w} \psi(W) ds_w.$$

Somit gestattet die Kernfunktion die Lösung des Dirichletschen und des Neumannschen Problems. — Aus dem Eindeutigkeitssatz ergibt sich die wichtige Beziehung

$$K(Z, W) = \frac{1}{2\pi} [N(Z, W) - G(Z, W)] \text{ zwischen der Kernfunktion einerseits und der}$$

Greenschen Funktion G und der Neumannschen Funktion N andererseits. Die Greensche Funktion ist orthogonal zu jeder Funktion aus A , und das skalare Produkt der Neumannschen Funktion mit einer Funktion aus A reproduziert dieselbe, mit 2π multipliziert. Ist eine beliebige symmetrische Fundamentallösung $S(Z, W)$ bekannt, so berechnet sich die Greensche Funktion aus der Kernfunktion als $G(Z, W) = S(Z, W) - D_w \{ S(Z, T), K(T, W) \}$; ist G bekannt, so kann auch N berechnet werden. — Die Kernfunktion als Operator im Raum der Funktionen wird im folgenden Abschnitt untersucht. In einem Exkurs über harmonische Funktionen wird ein interessanter Vergleich mit den dort verwendeten Methoden gezogen. — Die Variation des Kerns mit dem Bereich B ist leicht zu beherrschen, daraus ergeben sich in natürlicher Weise analoge Formeln für die Greensche und Neumannsche Funktion, wie sie im klassischen Fall von Hadamard hergeleitet wurden [Mém. prés. par divers savants à l'Acad. des Sciences de l'Institut de France 33, Nr. 4 (1908)].

Kriszten (Zürich).

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

$$\text{Parodi, M.: Sur une propriété de l'équation intégrale } \int_0^\infty \frac{t^x f(x) dx}{\Gamma(1+x)} = g(t).$$

Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. s. 62, 24—26 (1948).

L'A. considera le equazioni:

$$\int_0^\infty \frac{t^x f(x) dx}{\Gamma(1+x)} = \left\{ \int_0^t \cdots \int_0^t g(t) (dt)^n \right. \quad (1)$$

$$(2)$$

e dimostra che ogni soluzione della (2) si ottiene da una soluzione della (1) sostituendo la variabile indipendente x con $x - n$. *C. Miranda* (Napoli).

Parodi, Maurice: Sur un type d'équations intégrales résolubles par le calcul symbolique. *C. r. Acad. Sci., Paris* **226**, 43—45 (1948).

L'A. osserva che la risoluzione dell'equazione integrale di seconda specie:

$$f(t) + \lambda \int_0^{\infty} K(t, x) f(x) dx = g(t)$$

ove $K(t, x) = \varrho(p) e^{xy(p)}$ può eseguirsi facilmente mediante il calcolo simbolico nel caso in cui, rimanendo arbitraria $\varrho(p)$, $\eta(p)$ è tale che la seconda iterata riproduce la variabile: $\psi[\psi(p)] = p$. *C. Miranda* (Napoli).

Cameron, R. H. and W. T. Martin: Fourier-Wiener transforms of functionals belonging to L_2 over the space C . *Duke math. J.* **14**, 99—107 (1947).

Es sei C der Raum der reellwertigen stetigen Funktionen $x(t)$ in $0 \leq t \leq 1$ mit $x(0) = 0$ und $L_2(C)$ die Klasse der komplexwertigen, W -meßbaren [Maß nach N. Wiener, *Acta Math.*, Uppsala **55**, 117—258 (1930)] Funktionale $F(x)$ über C , für welche

$$N(F) = \int |F(x)|^2 d_W x < \infty$$

ist. Verf. zeigt, daß jedes $F(x) \in L_2(C)$ eine Fourier-Wiener-Transformierte $G(y) \in L_2(C)$ besitzt; es besteht die Plancherelsche Relation $N(F) = N(G)$. Die Transformierte von $G(y)$ ist $F(-x)$. — Die Fourier-Wiener-Transformation wird in schwacher Modifikation einer früher gegebenen Definition in einer Note des erstgenannten Verf. [Some examples of Fourier-Wiener transforms of analytic functionals, *Duke math. J.* **12**, 485—488 (1945)] zunächst für eine in $L_2(C)$ dichte Funktionalkasse E_m erklärt. Diese Klasse wurde bereits in einer früheren Note beider Verf. [Fourier-Wiener transforms of analytic functionals, *Duke math. J.* **12**, 489 bis 507 (1945)] betrachtet. Für $F \in E_m$ wird die Transformierte durch

$$G(y) = \int F(\sqrt{2} x + i y) d_W x$$

erklärt. Für $F \in L_2(C)$ gibt es eine Folge $F_n \in E_m$ ($n = 1, 2, \dots$) so, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} N(F - F_n) = 0$ ist. Die Fourier-Wiener-Transformierte von F wird dann durch

$$G(y) = \text{l. i. m.}_{n \rightarrow \infty} G_n(y)$$

definiert, wobei natürlich, wie die Verff. zeigen, Unabhängigkeit von der speziellen Folge F_n besteht. — Jedes Funktional $F \in L(C)$ kann in eine Fourier-Hermiteische Reihe entwickelt werden [vgl. die Note beider Verff.: *Ann. Math.*, Princeton, II. s. **48**, 385—392 (1947); dies. Zbl. **29**, 143] und durch gliedweise Ausführung gewinnen die Verff. eine Darstellung der Fourier-Wiener-Transformation. *Hudwiger*.

Bers, L. and A. Gelbart: On generalized Laplace transformations. *Ann. Math.*, Princeton, II. s. **48**, 342—357 (1947).

Die Arbeit handelt von den Σ -monogenen (Σ -m.), d. h. den komplexwertigen Funktionen $f(z) = f(x + i y) = u(x, y) + i v(x, y)$ der komplexen Veränderlichen z , die den partiellen Differentialgleichungen $u_{\alpha\alpha} = \tau_1(y) v_{\alpha\alpha} = -\tau_2(y) v_{\alpha\alpha}$ genügen; der Buchstabe Σ bezeichnet die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & \tau_1 \\ 1 & \tau_2 \end{pmatrix}$. Die Funktionen $f(z)$ sind in einem Untergebiet des Streifens $y_1 \leq y \leq y_2$, $-\infty < x < \infty$ so erklärt, daß τ_1 und τ_2 auf der Strecke $y_1 \leq y \leq y_2$ positiv und analytisch sind; meist steht der Annahme $y_1 = -\infty$, $y_2 = \infty$ nichts im Wege. Durch die Ansätze

$$\int_{z_0} f(\zeta) d_{\Sigma} \zeta = \int_{z_0} (u dx - \tau_2 v dy) + i \int_{z_0} (v dx + \tau_1^{-1} u dy),$$

$$f'(z) = d_{\Sigma} f / d_{\Sigma} z = u_{\alpha} + i v_{\alpha} = \tau_1 v_y - i \tau_2^{-1} u_y$$

führt man Σ -Integral und Σ -Ableitung von $f(z)$ ein; beide sind Σ -m. Potenzen

$a \cdot Z^{(n)}(z_0; z)$ mit komplexer Vorzahl $a = a' + ia''$ erklärt man durch den Rücklauf

$$a \cdot Z^{(n)}(z_0; z) = n \int_{z_0}^z [a \cdot Z^{(n-1)}(z_0; z)] d_{\Sigma} z, \quad a \cdot Z^{(0)}(z_0; z) = a.$$

Abkürzungen: $1 \cdot Z^{(n)}(z_0; z) = Z^{(n)}(z_0; z)$, $a \cdot Z^{(n)}(0; z) = a \cdot Z^{(n)}(z)$. Es gilt

$$a \cdot Z^{(n)} = a' Z^{(n)} + ia'' Z^{(n)}(z) = \sum_{\nu}^{0, n} \binom{n}{\nu} x^{n-\nu} i^{\nu} Y^{(\nu)}(y), Z^{*(n)}(z) = \sum_{\nu}^{0, n} \binom{n}{\nu} x^{n-\nu} i^{\nu} Y^{*(\nu)}(y),$$

wo $Y^{(0)} = Y^{*(0)} = 1$ und bei geradem oder ungeradem n

$$Y^{(n)} = n \int_0^y \tau_2(\eta) Y^{(n-1)}(\eta) d\eta, \quad Y^{*(n)} = n \int_0^y [\tau_1(\eta)]^{-1} Y^{*(n-1)}(\eta) d\eta;$$

$$Y^{(n)} = n \int_0^y [\tau_1(\eta)]^{-1} Y^{(n-1)}(\eta) d\eta, \quad Y^{*(n)} = n \int_0^y \tau_2(\eta) Y^{*(n-1)}(\eta) d\eta$$

ist. Wenn $f(z)$ in (der Nähe von) z_0 Σ -m. ist, so gestattet $f(z)$ die Taylorsche Entwicklung

$$(1) f(z) = \sum_n^{0, \infty} a_n \cdot Z^{(n)}(z_0; z), \quad a_n = f^{(n)}(z_0/n!) \text{ mit } f^{(0)}(z) = f(z), \quad f^{(n)}(z) = f^{(n-1)'}(z).$$

Sie dient dazu, die Σ -Exponentielle (mit dem reellen Festwert α) durch die in jedem beschränkten Gebiete gleichmäßig und absolut konvergente Reihe

$$a \cdot E(z_0; \alpha, z) = \sum_n^{0, \infty} (\alpha^n a/n!) \cdot Z^{(n)}(z_0; z)$$

zu erklären. Mit $E(0; \alpha, z) = E(\alpha, z)$ gelten die Seitenstücke der Eulerschen Formeln

$$E(\alpha, z) = e^{\alpha x} [c(\alpha, y) + is(\alpha, y)], \quad i \cdot E(\alpha, z) = i e^{\alpha x} [c^*(\alpha, y) + is^*(\alpha, y)]$$

$$\text{mit } c(\alpha, y) = \sum_n^{0, \infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{(2n)!} Y^{(2n)}(y), \quad s(\alpha, y) = \sum_n^{0, \infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} Y^{(2n+1)}(y)$$

und den in Y^* ebenso gebildeten $c^*(\alpha, y)$ als den Verallgemeinerungen von $\cos \alpha y$, $\sin \alpha y$, die die Beziehung erfüllen $s(\alpha, y) s^*(\alpha, y) + c(\alpha, y) c^*(\alpha, y) = 1$. — Zur Erläuterung und Begründung des Vorstehenden vgl. die Arbeiten der Verff. in Trans. Amer. math. Soc. **56**, 67—93 (1944); Quart. appl. Math. **1**, 168—188 (1943). — Hauptgegenstand der vorliegenden Abhandlung sind die Σ -m. Funktionen $f(z)$, die sich mit einer komplexwertigen Funktion $F(\lambda) = F_1(\lambda) + iF_2(\lambda)$ der reellen Veränderlichen α in der Form

$$f(z) = L_{\Sigma} \{F(\lambda)\} = \int_0^{\infty} F(\lambda) E(-\alpha, z) d\lambda, \quad \text{kurz } \mathfrak{L}_{\Sigma}$$

darstellen lassen, also als verallgemeinerte Laplacesche Transformierte (v. L. T.) —

Verallgemeinerungen von $\varphi(z) = L\{F(\lambda)\} = \int_0^{\infty} F(\lambda) e^{-\alpha z} d\lambda$, kurz \mathfrak{L} . Diese Funktionen \mathfrak{L}_{Σ} lassen sich auch als Lösungen der partiellen Differentialgleichungen

$$(u_x/\tau_1)_x + (u_y/\tau_2)_y = 0, \quad (\tau_2 v_x)_x + (\tau_1 v_y)_y = 0$$

kennzeichnen, die der Gestalt

$$u = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} c(\alpha, y) F_1(\lambda) d\lambda + \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} s^*(\alpha, y) F_2(\lambda) d\lambda, \quad v \text{ entsprechend,}$$

fähig sind. — Ebensolche Ergebnisse wie die hier für die einseitige v. L. T. erzielten lassen sich auch für die zweiseitige v. L. T. und für die v. L.-Stieltjessche T. gewinnen. — Von den Funktionen $c(\alpha, y)$, $s(\alpha, y)$, $c^*(\alpha, y)$, $s^*(\alpha, y)$ zeigen Verff., daß sie für $|y| \leq A < \infty$, $-\infty < \alpha < \infty$ gleichmäßig beschränkt sind, und stellen asymptoti-

sche Formeln für sie auf, von denen eine angeführt sei:

$$s(x, y) = [\tau_1(y) \tau_2(y) \tau_1(0) \tau_2(0)]^{-\frac{1}{2}} \sin \left\{ x \int_0^y [\tau_2(\eta) \tau_1(\eta)]^{\frac{1}{2}} d\eta \right\} + O(x^{-1}), \quad x \rightarrow \infty,$$

wenn $|y| \leq A < \infty$. Die Ableitungen der vier Funktionen sind in dem angegebenen Gebiete ebenfalls gleichmäßig beschränkt. — In bezug auf die Konvergenz der v. L.-Integrale gelangten Verff. zu folgendem Befunde: \mathcal{Q}_y konvergiert (absolut oder bedingt) in der Halbebene der (absoluten oder bedingten) Konvergenz von \mathcal{Q} und in keiner größeren. Ist F reell oder rein imaginär, so sind die Gebiete der (absoluten oder bedingten) Konvergenz von \mathcal{Q}_y Halbebenen. — Wenn β die Konvergenz-Abszisse von \mathcal{Q} ist, konvergiert \mathcal{Q}_y gleichmäßig in dem unendlichen Halbstreifen $x \geq x_0 > \beta$, $-\infty < y_1 \leq y \leq y_2 < \infty$. — \mathcal{Q}_y stellt in der offenen Konvergenz-Halbebene von \mathcal{Q} eine Σ -m. Funktion vor. — Die Arbeit schließt mit Anwendungen I. auf die analytische Fortsetzung, $q(z)$ und $f(z)$ entsprechen sich in bezug auf einen reellen Punkt $x_0 > \beta$. Es sei $q(z)$ eine analytische, in der Halbebene $\operatorname{Re} z > \beta$ reguläre und dort in der Form \mathcal{Q} darstellbare Funktion, z_0 ein Punkt dieser Halbebene und $f(z)$ die Σ -m. Funktion, die $q(z)$ in z_0 entspricht. Dann ist $f(z)$ für $\operatorname{Re} z > \beta$ erklärt und regulär. Auf Grund dieses Satzes kann man die v. L.T. dazu benutzen, Σ -m. Funktionen, die durch Potenzreihen erklärt sind, analytisch fortzusetzen.

Verff. zeigen dies an dem Beispiele $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n Z^{(n)}(1; z)$. — II. auf die formale Multiplikation, die so zu verstehen ist: Wenn man die in z_0 regulären Σ -m. Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ nach (1) in Potenzreihen mit den Vorzahlen a_n und b_n entwickelt, so konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot Z^{(n)}(z_0; z)$ mit $c_n = \sum_{\nu}^{0, n} a_\nu \cdot b_{n-\nu}$ in der Nähe von z_0 und erklärt eine Σ -m. Funktion, die das formale Produkt von $f(z)$ und $g(z)$ heißt mit z_0 als dem Mittelpunkt der Multiplikation. Mit Hilfe des Faltungssatzes der gewöhnlichen L.T. beweisen Verff.: Sind $f(z)$, $g(z)$ zwei Σ -m., für $\operatorname{Re} z > \beta$ reguläre Funktionen und $f(z) = I_X(F)$, $g(z) = I_X(G)$, dann konvergiert die v. L.T. $I_X\{H(\lambda)\} = h(z)$, wo $H(\lambda) = (i_0^X F)$ für $\operatorname{Re} z > \beta_0$, und die Σ -m. Funktion $h(z)$ ist, das formale Produkt von f und g , mit einem Punkte der reellen Achse als Mittelpunkt. Der letzte Satz betrifft die analytische Fortsetzbarkeit formaler Produkte.
L. Koschmieder (Graz).

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Arens, Richard: Representation of *-algebras. Duke math. J. 14, 269—282 (1947).

Soit A une algèbre normée complète sur le corps des nombres complexes, dans laquelle est définie un antiautomorphisme involutif $f \rightarrow f^*$. L'Au. suppose qu'il existe un nombre $k > 0$ tel que $k \|f\| \cdot \|f^*\| \leq \|ff^*\|$ pour tout $f \in A$; il montre alors que si en outre A est commutative et admet un élément unité, A est isomorphe à l'algèbre de toutes les fonctions continues (à valeurs complexes) définies dans un espace compact X , f^* étant la fonction $f^*(x) = \overline{f(x)}$; lorsque $k = 1$, ce théorème avait déjà été établi par Gelfand et Neumark [Mat. Sbornik, II, s. 12, 197—213 (1943)]. La démonstration se fait suivant le procédé habituel qui consiste à prendre pour X l'espace des idéaux maximaux de A ; le point essentiel consiste à prouver que l'on obtient bien ainsi toutes les fonctions continues sur X , par application du théorème de Weierstrass-Stone [M. H. Stone, Trans. Amer. math. Soc. 41, 375—481 (1937); ce Zbl. 17, 135], qui es rendue possible ici grâce à un lemme antérieur (lemme 3) prouvant que pour tout élément „autoadjoint“ f (c'est-à-dire tel que $f^* = f$), le spectre de f (ensemble des nombres complexes λ tels que $f - \lambda$ n'ait pas d'inverse) est réel. L'Au. étend son théorème au cas où A n'a pas d'élément unité:

X est alors localement compact et \mathcal{A} isomorphe à l'algèbre des fonctions continues nulles à l'infini. Il en déduit aussi des caractérisations de certaines algèbres normées complètes sur le corps des nombres réels.

J. Dieudonné (Nancy).

Eberlein, W. F.: Abstract ergodic theorems. Proc. nat. Acad. Sci. USA 34, 43—47 (1948).

Ergodische Sätze handeln von stationären Strömungen inkompressibler Flüssigkeiten in einem mehrdimensionalen Raum Ω . Im Hilbertschen Raum \mathfrak{H} der Punktfunktionen (in Ω) erzeugen die Strömungen gewisse unitäre Transformationen. Verf. ersetzt (ähnlich wie vor ihm andere Autoren) den Hilbertschen Raum durch einen Banach-Raum E und die Strömungen durch eine Halbgruppe G linearer Transformationen in E . Um ergodische Sätze aussagen zu können, müssen über G (wie auch bei Strömungen) gewisse Voraussetzungen gemacht werden, d. h. G wird „ergodisch“ angenommen. Gegenüber früheren Autoren macht Verf. dabei geringere Beschränktheits- und Abzählbarkeitsannahmen. Die Sätze geben verschiedene genaue Bedingungen dafür, daß ein Element aus E , welches sich durch „fastinvariante Integrale“ approximieren läßt, Fixpunkt gegenüber G ist. Fastinvariante Integrale sind gewisse Mittelwerte der Gestalt

$$\left(\sum_j a_j T_j\right) x \quad \text{mit} \quad x \in E, T_j \in G, a_j \geq 0, \sum_j a_j = 1.$$

Es gelingt, mit diesen Sätzen gleichzeitig z. B. die ursprünglichen Ergodensätze, den Mittelwertsatz der Theorie der Bohrschen fastperiodischen Funktionen und den Satz über die Summierbarkeit der Fourierreihen zu behandeln. Die Theoreme sind Verallgemeinerungen von Sätzen von Yosida und Kakutani [Ann. Math., Princeton, II. s. 42, 188—228 (1941); dies. Zbl. 24, 324]. Durch zusätzliche Bemerkungen wird ermöglicht, auch den Mittelwertsatz der v. Neumannschen Theorie der fastperiodischen Funktionen auf Gruppen als Ergodensatz aufzufassen und zu beweisen. Den Beweisskizzen, welche später genauer ausgeführt werden sollen, ist zu entnehmen, daß die Methoden mit v. Neumanns Theorie des Mittelwerts fast periodischer Funktionen auf Gruppen Berührungspunkte haben. Maak (Hamburg).

Praktische Analysis:

Bruins, E. M.: Kubische und biquadratische Gleichungen. Mathematica, Groningen 14, 90—99 (1947) [Holländisch].

Eine Zusammenstellung von Hilfsmitteln für die Lösung von Gleichungen 3. und 4. Grades. Folgende Methoden wurden vom Verf. ausgewählt: Für die Verfeinerung eines Näherungswertes das Tangentenverfahren von Newton unter Benutzung des Hornerischen Schemas. Näherungswerte werden Nomogrammen entnommen: Die Gl. 3. Grades $y^3 + A y^2 + B y + C = 0$ wird durch $y = x \sqrt[3]{C}$ auf die Form $F(x) = x^3 + a x^2 + b x + 1 = 0$ gebracht, in der Gleichung 4. Grades $y^4 + A y^3 + B y^2 + C y + D = 0$ wird durch $y = z - \frac{1}{4} A$ die dritte Potenz entfernt: $z^4 + B' z^2 + C' z + D' = 0$ und dann mit $z = x \sqrt[4]{D'}$ eine der Formen $F(x) = x^4 + a x^2 + b x \pm 1 = 0$ erreicht. In jedem der drei Fälle entspricht ein Punkt der (a, b) -Ebene einer Gleichung, jedem Wurzelwert x eine Gerade in dieser Ebene, die durch den Gleichungspunkt gehenden Geraden geben somit die reellen Wurzeln. — Zur Berechnung der komplexen Wurzeln werden die folgenden Formeln angegeben: Bei der kubischen Gleichung $F(x) = 0$ ist, wenn w die reelle Wurzel bedeutet, der Realteil der komplexen Wurzeln $u \pm i v$ durch $2u = -(a + w)$ festgelegt, während $v^2 = F'(u) = 2 F(u)/F''(u)$. Sind bei der Gl. 4. Grades zwei Wurzeln w_1, w_2 reell, so folgen die anderen Wurzeln $u \pm i v$ aus $2u = -(w_1 + w_2)$, $v^2 = 6 F'(u)/F'''(u)$; sind alle vier Wurzeln imaginär, so ist zunächst die positive Wurzel r der kubischen Resolvente $r^3 + 2a r^2 + (a^2 - 4) r - b^2 = 0$ zu bestimmen,

worauf sich dann u, v aus $4u^2 + v^2 = 6F'(u)F''(u)$ berechnen lassen. Als Kontrolle in diesem Falle wird $(u_1^2 + v_1^2)(u_2^2 + v_2^2) = 1$ genannt. *Bödeuadt.*

Bodewig, E.: L'approximation des racines complexes d'une équation transcendente à une inconnue. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII, s. 3, 218—223 (1947).

Wie bekannt, ist die Approximation der komplexen Wurzeln z einer in einer Unbekannten transzendenten Gleichung $f(z) = 0$ sehr mühsam, und auch die Newtonsche Approximationsmethode konvergiert nur, wenn man von einem schon hinlänglich approximierten Wert ausgeht. Daher die Forderung nach einem Verfahren, das rasch zu Resultaten erster Approximation führt. Verf. zeigt ein solches elegantes, zweckdienliches Verfahren auf, welches sich auf die Tatsache stützt, daß die Gleichung $\zeta = f(z)$ eine konforme Abbildung zwischen den Ebenen z und ζ darstellt. Des weiteren gibt Verf. eine Eulersche Approximationsmethode an, die stärker als die Newtonsche ist. *L. Cesari (Bologna).*

Caffero, Federico: Sull'approssimazione mediante poligoni degli integrali del sistema differenziale: $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Giorn. Mat. Battaglini 77, 28—35 (1947).

Anwendung der Methode von Cauchy-Lipschitz auf die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ [$f(x, y)$ stetig und beschränkt in $a \leq x \leq b$, $-\infty < y < +\infty$], falls die Lösung nicht eindeutig ist. Die Polygonzüge können durch geeignete Festsetzungen so gestaltet werden, daß sie gegen eine beliebige (oder vorgegebene) Lösung, insbesondere gegen die maximale bzw. minimale Lösung konvergieren. Es folgen die bekannten Sätze. *Gröbner (Innsbruck).*

Mathematical tables. Report of committee on calculation of mathematical tables. Advanc. Sci., Brit. Assoc. Advanc. Sci. 5, 67—72 (1948).

Der Bericht enthält u. a. eine Aufzählung und Beschreibung der seit 1939 von dem Committee veröffentlichten oder bearbeiteten Tafeln. *Pannwitz (Berlin).*

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Statistik:

Brown, George W.: Discriminant functions. Ann. math. Statist., Ann. Arbor, 18, 514—528 (1947).

Verf. entwickelt die in der Hauptsache auf R. A. Fisher und Hotelling zurückgehende Technik der diskriminierenden Funktionen von elementarem Standpunkt aus. Am trivialen Beispiel zweier übergreifender normaler Verteilungen mit Mittelwerten $\alpha = \beta$ bzw. $\alpha + \beta$ und Streuung 1 werden die Grundbegriffe der Theorie hergeleitet und sodann in anschaulicher Weise schrittweise auf die mehrdimensionalen diskriminierenden Funktionen übertragen. Die Ausführungen werden durch eine recht vollständige Bibliographie dieses für die Biologie und Anthropologie wichtigen Fragenkomplexes ergänzt. *M. P. Geppert (Bad Nauheim).*

Sarmanov, O. V.: Über die Rektifizierung einer symmetrischen Korrelation. Doklady Akad. Nauk SSSR, II, s. 58, 745—747 (1947) [Russisch].

Untersuchung folgender Frage: Gibt es eine Transformation $X = q(x)$, $Y = q(y)$, durch welche die symmetrische zweidimensionale Verteilung $F(x, y)$ mit nichtlinearer Regression in eine solche mit linearer Regression übergeht? Ist

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) dy$$

die zugehörige Randverteilung, so muß $q(x)$ monoton sein und der Integralgleichung

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \cdot [F(x, y)/p(x)] dy$$

genügen, für welche Verf. mittels Zerlegung des k -fach iterierten Kerns

$$F^{(k)}(x, y)/\sqrt{p(x)p(y)} \quad \text{mit} \quad F^{(k)}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} [F^{(k-1)}(x, t) F(y, t)/p(t)] dt$$

in Fundamentalfunktionen Bedingungen für die Monotonität der Lösungen untersucht.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Kolmogorov, A. N., A. A. Petrow, Ju. M. Smirnov: Eine Formel von Gauß aus der Theorie der kleinsten Quadrate. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **11**, 561—566 (1947) [Russisch].

Befriedigen die bekannten Größen x_{ir} und die unbekannten y_r ($r = 1, \dots, N$; $i = 1, \dots, n$, $n < N$) N Gleichungen $y_r = \sum_{i=1}^n a_i x_{ir}$ mit unbekannten Konstanten a_i und sind an Stelle der y_i die Größen $\eta_r = y_r + \Delta_r$ gegeben, wobei Δ_r voneinander unabhängige Zufallsvariablen mit $M(\Delta_r) = 0$, $M(\Delta_r^2) = s^2$, $M(\Delta_r^4) = f^4$ sind, so bestimmen sich nach der Methode der kleinsten Quadrate Schätzungen $\alpha_i = \sum_{r=1}^N u_{ir} \eta_r$ der a_i eindeutig aus

$$(N - n) \sigma^2 = \sum_{r=1}^N \varepsilon_r^2 = \sum_{r=1}^N \left(y_r - \sum_{i=1}^n a_i x_{ir} \right)^2 = \text{Minimum.}$$

Gauß hat für den mittleren Fehler der Abschätzung die Formel (in moderner Schreibweise

$$(N - n) D^2(\sigma^2) = (N - n) M(\sigma^2 - s^2)^2 = f^4 - s^4 - (f^4 - 3s^4)(n - \Omega)/(N - n)$$

mit

$$\Omega = \sum_{r=1}^N \left(\sum_{i=1}^n x_{ir} u_{ir} \right)^2$$

angegeben. Mit Hilfe geometrischer Deutung von Ω und hieraus folgender Abschätzung $n^2/N \leq \Omega \leq n$ verschärfen Verff. die Gaußsche Abschätzung zu

$$f^4 - s^4 - n(f^4 - 3s^4)/N \leq (N - n) D^2(\sigma^2) \leq f^4 - s^4, \quad \text{wenn } f^4 - 3s^4 \geq 0, \\ f^4 - s^4 \leq (N - n) D^2(\sigma^2) \leq f^4 - s^4 + n(3s^4 - f^4)/N, \quad \text{wenn } f^4 - 3s^4 \leq 0.$$

Es werden Fälle angegeben, in welchen die Grenzen von Ω tatsächlich erreicht werden.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Mal'cev, A. J.: Bemerkung zu der Arbeit von A. N. Kolmogorov, A. A. Petrov und Ju. M. Smirnov „Eine Formel von Gauß aus der Theorie der kleinsten Quadrate“. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **11**, 567—568 (1947) [Russisch].

Anknüpfend an Kolmogoroff, Petroff, Smirnov (vorsteh. Referat) beweist Verf., daß Ω bei beliebigen n, N die untere Grenze n^2/N erreichen kann, durch Konstruktion einer reellen orthogonalen Matrix N -ter Ordnung, für welche die Summe der Quadrate der ersten p Elemente in jeder Spalte 1 ist. *Geppert*.

David, F. N.: A power function for tests of randomness in a sequence of alternatives. Biometrika, Cambridge **34**, 335—339 (1947).

In einer Reihe von n Versuchen E_1, \dots, E_n seien jeweils nur die beiden Alternativen E oder \bar{E} möglich. Unter der Voraussetzung H_0 der Unabhängigkeit ist bei jedem Versuch die Wahrscheinlichkeit für E konstant p , die für \bar{E} konstant $q = 1 - p$. Als ergänzende Hypothese läßt Verf. nur diejenige (H_1) einfacher Markoffscher Ketten zu, mit den Wahrscheinlichkeiten P und $Q = 1 - P$ für E bzw. \bar{E} im ersten Versuch und den bedingten Wahrscheinlichkeiten p_1 und $q_1 = 1 - p_1$ für E und \bar{E} nach vorangegangennem E bzw. p_2 und $q_2 = 1 - p_2$ nach vorangegangennem \bar{E} . Aus der von Stevens [Ann. Eugen., London **9**, 10—17 (1939); dies. Zbl. **23**, 241] angegebenen Anzahl f_k der Anordnungen von r_1 Größen E und r_2 Größen \bar{E} in k Sequenzen,

$$f_{2t} = 2 \cdot f_t(r_1) f_t(r_2), \quad f_{2t+1} = f_{2t} \cdot (r_1 + r_2 - 2t)/2t$$

mit

$$f_t(r) = (r-1)!/(t-1)!(r-t)!$$

ergibt sich unter der Hypothese H_0 die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die r_1 Treffer und r_2 Nicht-Treffer in k Sequenzen auftreten, als $P\{k|r_1, r_2, H_0\} = f_k/\sum f_t$; ihre Summe $P\{k < k_1|H_0\}$ bzw. $P\{k > k_2|H_0\}$ entscheidet über Ablehnung oder Zulassung von H_0 . Verf. berechnet die analogen Wahrscheinlichkeiten im Falle H_1 der einfachen Markoff-Kette zu

$$P\{2t|r_1 r_2 H_1\} = \frac{(p_2 q_1 p_1 q_2)^t f_t(r_1) f_t(r_2) \cdot (P p_2 + Q q_1)}{\sum_{t=1}^{r_2} (p_2 q_1 p_1 q_2)^t \cdot [f_t(r_1) f_t(r_2) (P p_2 + Q q_1) + P f_{t-1}(r_1) f_t(r_2) p_1 + Q f_t(r_1) f_{t-1}(r_2) q_2]}$$

$$P\{2t+1|r_1 r_2 H_1\} = \frac{P\{2t r_1 r_2 H_1\} \cdot [P f_{t-1}(r_1) f_t(r_2) p_1 + Q f_t(r_1) f_{t-1}(r_2) q_2]}{f_t(r_1) f_t(r_2) \cdot (P p_2 + Q q_1)}$$

und daraus unter der speziellen Annahme $P = P p_1 + Q p_2$ „bedingte Machtfunktionen“, nämlich $1 - P\{k \geq k_1|H_1\}$, die er für einige spezielle Fälle analysiert. Diese bedingten Machtfunktionen werden mit den von Neyman und Pearson definierten „power functions“ in Beziehung gesetzt. *M. P. Guppert.*

Maurin, Jaques: Un mode de calcul général, de la fonction de probabilité de moyennes. C. R. Acad. Sci., Paris **225**, 1268—1269 (1947).

Maurin, Jaques: Extension analytique d'un calcul de la fonction de probabilité de moyennes correspondant à une probabilité négative. C. r. Acad. Sci., Paris **226**, 51—53 (1948).

Ausgehend von einer arithmetischen Verteilung wird durch einen Grenzübergang die Wahrscheinlichkeitsfunktion für den Mittelwert der Varianten von p aus demselben Kollektiv herausgegriffenen Objekten angegeben und dieses Resultat zur Darstellung der Wahrscheinlichkeitsfunktion eines Mittelwertes von Mittelwerten erweitert. In diese Wahrscheinlichkeitsfunktionen wird in der zweiten Note durch eine geeignete Substitution an Stelle der Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$ der Varianten eine erzeugende Funktion $q(x)$ eingeführt. Die schließlich erhaltenen Gleichungen, welche, gegeben durch die kombinatorische Analyse, sich negativen oder unstetigen Werten von $f(x)$ anpassen, bleiben für negative oder unstetige erzeugende Funktionen $q(x)$ bestehen unter der einzigen Bedingung, daß ihr bestimmtes totales Integral existiert und ihre Eindeutigkeit in x gesichert ist. Ferner sind alle allgemeinen Beziehungen zwischen den Momenten der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Mittelwerte übertragbar auf jede Funktion $q(x)$. *Kraus (Friedberg).*

Egudin, G. I.: Einige Beziehungen zwischen den Momenten der Verteilung der Extrem-Werte bei zufälligen Verteilungen. Doklady Akad. Nauk SSSR., II, S. 58, 1581—1584 (1947) [Russisch].

Seien $F(x)$ die Verteilungsfunktion der stochastischen Variablen X und $X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n}$ die n der Größe nach geordneten Werte X in einer zufälligen Stichprobe vom Umfange n ; dann ist die Verteilungsfunktion $X_{k,n}$, d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der k -tkleinste Wert einer Stichprobe vom Umfange n unterhalb x liege,

$$F_{k,n}(x) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i}.$$

Verf. beweist, daß das arithmetische Mittel der r -ten Momente von $X_{r,n}$

$$X_{k,n}^r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r dF_{k,n}(x)$$

gleich dem entsprechenden Moment des Kollektivs ist:

$$\sum_{k=1}^n \bar{X}_{k,n}^r / n = \int_{-\infty}^{\infty} x^r dF(x).$$

Für den Spezialfall eines normal verteilten Kollektivs:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \exp[-t^2/2\sigma^2] dt/\sigma\sqrt{2\pi}$$

ergeben sich hieraus Rekursionsformeln für die Integrale

$$a_{s,r} = \bar{X}_{s,s}^r/\sigma^r,$$

und zwar

$$\sum_{i=(n+1)/2}^n \binom{n}{i} \sum_{l=0}^{n-i} \binom{n-i}{l} (-1)^l a_{i+l,r} = 0 \quad \text{für ungerade } r,$$

$$\sum_{k=n/2+1}^n \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \sum_{l=0}^{n-i} \binom{n-i}{l} (-1)^l a_{i+l,r} = \frac{n}{2} \quad \text{für gerade } r,$$

welche für $r=1$ eine von Romanovsky [Biometrika, Cambridge 25, 195—197 (1933)] angegebene enthalten. Die Größen $a_{n,r}$ spielen eine wichtige Rolle bei der Schätzung der Momente des Kollektivs aus den empirischen Momenten der Extremwerte in Stichproben.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Brown, George W.: On small-sample estimation. Ann. math. Statist., Ann. Arbor 18, 582—585 (1947).

Verf. analysiert den gebräuchlichen Begriff einer unverfälschten (unbiased) Schätzung eines Kollektivparameters θ aus einer Stichprobe und stellt der bisher als solche bezeichneten Mittelwert-unverfälschten Schätzung eine Median-unverfälschte Schätzung gegenüber, für welche bei gegebenem θ der Zentralwert der Stichprobenverteilung mit θ übereinstimmt. Ebenso wie diese ist auch die likelihood-unverfälschte Schätzung von θ gegenüber eindeutigen Transformationen invariant, welche durch die Forderung $h(\theta|\theta') \leq h(\theta|\theta)$ bestimmt wird, wobei $h(\theta|\theta)$ = Wahrscheinlichkeitsdichte der Schätzung $\hat{\theta}$ bei gegebenem Kollektivparameter θ . Die Begriffe werden illustriert am Problem der Schätzung von σ^2 bzw. σ eines normal verteilten Kollektivs aus der Summe S der Abweichungsquadrate einer Stichprobe vom Umfange n ; $S^2/(n-1)$ ist Mittelwert-unverfälschte und gleichzeitig die einzige likelihood-unverfälschte Schätzung von σ^2 , während $\sqrt{S^2/(n-1)}$ eine likelihood-unverfälschte, aber nicht Mittelwert-unverfälschte Schätzung von σ ist. Eine Schätzung heißt einfach, wenn sie die Verteilung der Variablen x eindeutig bestimmt. Verf. zeigt, daß eine einfache Maximum-likelihood-Schätzung stets likelihood-unverfälscht ist, und diskutiert die Maximum-likelihood-Schätzung im Falle der Alternative $\theta = \theta_0$ oder $\theta = \theta_1$.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Grubbs, Frank E. and Chalmers L. Weaver: The best unbiased estimate of population standard deviation based on group ranges. J. Amer. statist. Assoc. 42, 224—241 (1947).

Es wird eine Methode angegeben, um die Leistungsfähigkeit statistischer Reihen mit mehr als 11 Beobachtungswerten zu erhöhen. Hat man eine Reihe von N Versuchen und teilt diese in m Gruppen n_1, n_2, \dots, n_m ein, so daß $N = \sum_{i=1}^m n_i$ ist, und bezeichnet man die Streuung innerhalb der einzelnen Gruppen mit $R_{n_1}, R_{n_2}, \dots, R_{n_m}$, so wird als „beste unverfälschte“ (unbiased) Schätzung der Streuung σ des normal verteilten Kollektivs diejenige lineare Funktion $\sum_{i=1}^m a_i R_{n_i}$ definiert, welche 1. unverfälschte Schätzung von σ , d. h. für welche $E\left\{\sum_{i=1}^m a_i R_{n_i}\right\} = \sigma$ ist, und 2. deren Streuung minimal ist, d. h. für welche $E\left\{\sum_{i=1}^m a_i R_{n_i} - \sigma\right\}^2$ ein Minimum wird. — Diese von einer linearen Funktion der R_{n_i} ausgehende Methode zur Schätzung

von σ hat gegenüber anderen in der Statistik verwendeten Methoden erhebliche Vorteile, wie näher ausgeführt wird. Es werden auch nähere Angaben über die beste Gruppeneinteilung einer statistischen Aufnahme gemacht, um die beschriebene Methode anwenden zu können. Die leistungsfähigste Gruppe ist die, welche aus acht Größen besteht.

Kraus (Friedberg b. Augsburg).

Quensel, Carl-Erik: The validity of the z -criterion when the variates are taken from different normal populations. Skand. Aktuarietidskr. 1947, 44—55 (1947).

Ausdehnung des bei der klassischen Varianzanalyse zur z -Verteilung führenden Gedankenganges auf die umfassendere Nullhypothese, daß die einzelnen Elemente einer Stichprobe aus verschiedenen normal verteilten Kollektiven mit gleichen Mittelwerten und verschiedenen Streuungen entnommen seien. Die Verteilung der j -ten Probe der i -ten Klasse laute also

$$\varphi(x_{ij}) = \exp \left[-x_{ij}^2 / 2\lambda_{ij} \right] / \sqrt{2\pi\lambda_{ij}}.$$

Für die Simultanverteilung der bei der Varianzanalyse der N Werte x_{ij} auftretenden Abweichungsquadratsummen

$$y_1 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - m_i)^2; \quad y_2 = \sum_i n_i (m_i - m)^2; \quad y_3 = N m^2$$

mit m = Gesamtmittel, m_i = Klassenmittel bestimmt Verf. die charakteristische Funktion. Mittels Reihenentwicklung derselben wird für den (im klassischen Fall der F -Verteilung folgenden) Quotienten y_2/y_1 die Varianz berechnet für zwei — in gewissen Sinne dem in der homograden Theorie untersuchten Lexisschen bzw. Poissonschen Schema mit über- bzw. unternormaler Dispersion in der heterograden Theorie entsprechende — Sonderfälle: a) $\lambda_{i1} = \dots = \lambda_{in_i} = \lambda_i$ (y_1, y_2 voneinander unabhängig), b) $\lambda_{1j} = \dots = \lambda_{kj} = \lambda_j$ (y_1, y_2 abhängig). Im Falle a) liegt $\sigma^2(y_2/y_1)$ oberhalb, im Falle b) unterhalb der Streuung $2(k-1)(N-1)/N-k$ von y_2/y_1 des klassischen Falles.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Welch, B. L.: The generalization of Student's problem when several different population variances are involved. Biometrika, Cambridge 34, 28—35 (1947).

Sei y die mit der Streuung $\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^k \lambda_i \sigma_i^2$ normal verteilte Schätzung eines Kollektivparameters η , wobei $\lambda_i > 0$ bekannte Konstanten und σ_i^2 unbekannte Varianzen seien. Jedes σ_i^2 werde seinerseits mit f_i Freiheitsgraden aus s_i^2 geschätzt, dessen Wahrscheinlichkeitsverteilung in Stichproben

$$p(s_i^2) ds_i^2 = (f_i s_i^2 / 2 \sigma_i^2)^{f_i/2 - 1} \cdot \exp \left[-f_i s_i^2 / 2 \sigma_i^2 \right] d(f_i s_i^2 / 2 \sigma_i^2) / \Gamma(f_i/2)$$

laute. Als Spezialfälle umfassen diese Voraussetzungen die Schätzung der Differenz der Mittelwerte zweier normal verteilter Kollektive aus der Differenz der Stichprobenmittelwerte sowie den Vergleich zweier aus unabhängigen Stichproben berechneten Regressionskoeffizienten bei eventuell verschiedenen Restvarianzen bezüglich der wahren Regressionslinien. Aus der Bedingung

$$\int \dots \int j(s_1^2, \dots, s_k^2, P) \prod_i p(s_i^2) ds_i^2 = P \quad (0 < P < 1),$$

wo

$$j(s_1^2, \dots, s_k^2, P) = \frac{h(s_1^2, \dots, s_k^2, P) \wedge \sum \lambda_i \sigma_i^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2/2) du / \sqrt{2\pi}}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit für $y - \eta = h(s_1^2, \dots, s_k^2, P)$ bei festen s_i^2 bedeutet, gewinnt Verf. durch Reihenentwicklungen und Gleichungslösung mittels sukzessiver Approximationen für die Gleichung

$$Pr[y - \eta = h(s_1^2, \dots, s_k^2, P)] = P$$

die Näherungslösung

$$h(s_1^2, \dots, s_k^2, P) = \xi \left\{ \sum \lambda_i s_i^2 \cdot [1 + (1 + \xi^2) (\sum \lambda_i^2 s_i^4 / f_i) / 4 (\sum \lambda_i s_i^2)^2 \right. \\ \left. - (1 + \xi^2) (\sum \lambda_i^2 s_i^4 / f_i^2) / 2 (\sum \lambda_i s_i^2)^2 + (3 + 5 \xi^2 + \xi^4) (\sum \lambda_i^3 s_i^6 / f_i^2) / 3 (\sum \lambda_i s_i^2)^3 \right. \\ \left. - (15 + 32 \xi^2 + 9 \xi^4) (\sum \lambda_i^2 s_i^4 / f_i)^2 / 32 (\sum \lambda_i s_i^2)^4 \right\}$$

mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2/2) du / \sqrt{2\pi} = P,$$

die sich für $k = 1$ mit der von Fisher gegebenen Reihenentwicklung des Student-schen t_p deckt. Brauchbare numerische Resultate erzielt Verf. ferner durch die bequemere Approximation der Lösung durch die mit

$$f = [(\sum \lambda_i s_i^2)^2 - 2 \sum \lambda_i^2 s_i^4 / (f_i + 2)] / [\sum \lambda_i^2 s_i^4 / (f_i + 2)]$$

Freiheitsgraden der Student-schen t -Verteilung folgende Variable

$$v = (y - \eta) / \sqrt{\sum \lambda_i s_i^2}.$$

Der Gedankengang wird mit dem von Gosset (Student) herrührenden klassischen ($k = 1$) in Zusammenhang gebracht; die Resultate werden den von Behrens [Landw. Jb. 68, 807—837 (1929)], Fisher [Ann. Eugen., London 11, 141—172 (1941)], Jeffrey [Ann. Eugen., London 10, 48—51 (1940)] auf völlig anderer Grundlage gewonnenen, abweichenden Ergebnissen bezüglich des zum Mittelwertvergleich bei verschiedenen Streuungen dienenden Behrens-Testes gegenübergestellt.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Obukhov (Obuchov), V. M.: Applicability of test figures. Priklad. Mat. Mech., Moskva 11, 485—488 u. engl. Zusammenfassung 488 (1947) [Russisch].

Ein Meßwert werde einerseits in toto, aber infolge defekter Meßinstrumente mit einem systematischen Fehler behaftet, bestimmt. Andererseits werde aus der Gesamtheit von m Meßwerten eine zufällige Stichprobe vom Umfange n ($< m$) entnommen, deren Werte frei von systematischen Fehlern sind. Verf. schlägt Methoden zur Erreichung der die Realität am besten wiedergebenden Resultate vor und untersucht, unter welchen Bedingungen den verschiedenen Verfahren der Vorzug zu geben ist. Eine entscheidende Rolle spielt hierbei der Korrelationskoeffizient zwischen den n systematisch fehlerhaften Messungen x und den n Stichprobenwerten y .

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Olmstead, Paul S. and John W. Tukey, A corner test for association. Ann. math. Statist., Ann. Arbor 18, 495—513 (1947).

Zur Messung des Zusammenhanges zweier kontinuierlicher Zufallsvariablen schlägt Verf. eine nicht-parametrische „Eckenprüfung“ mittels der „Quadranten-summe“ vor. Durch die empirischen Zentralwerte der beiden Variablen x, y wird die xy -Ebene in 4 Quadranten geteilt, von denen jeweils die zwei kreuzweise gegenüberliegenden die gleiche Anzahl von Punkten der empirischen zweidimensionalen Verteilung enthalten. Bei Unabhängigkeit der Variablen weichen die auf die vier Quadranten entfallenden Anzahlen nur zufällig von $1/4$ der Gesamtzahl ab. Aus diesen Quadrantenzahlen wird durch die Addition derjenigen des ersten und dritten und Subtraktion derjenigen des zweiten und vierten die „Quadranten-summe“ berechnet, die offenbar nicht von den absoluten Größen der Variablen, sondern nur von deren Rangordnung abhängt. Mittels kombinatorischer Überlegungen stellt Verf. unter der Annahme, daß alle Permutationen der empirischen Variablenwerte gleich wahrscheinlich seien, die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Quadranten-summe in Stichproben vom Umfange $2n$ aus einem Kollektiv mit unabhängigen x, y auf und tabuliert sie für $n = 1, 2, \dots, 5, 7, \infty$. Der Gedankengang wird auf mehrdimensionale Korrelationsprobleme („Oktantensumme“ usw.) ausgedehnt. Besonderheiten dieses Tests sind: einfachste Rechnung, Betonung der extremen Werte, Unabhängigkeit von der genauen Größe der Variablen.

M. P. Geppert.

Scheffé, Henry: The relation of control charts to analysis of variance and chi-square tests. *J. Amer. statist. Assoc.* **42**, 684 (1947).

Druckfehlerberichtigung zur gleichnamigen Arbeit des Verf. [*J. Amer. statist. Assoc.* **42**, 125—431 (1947); dies. Zbl. **29**, 372]. Auf S. 427: vierte Zeile von oben: $\sigma \sqrt{n}$ an Stelle von $\sigma \sqrt{w}$; zweite Zeile von unten: S_2 an Stelle von S_{11} . *M. P. Geppert* (Bad Nauheim).

Biomathematik. Versicherungsmathematik:

Kimball, Bradford F.: A system of life tables for physical property based on the truncated normal distribution. *Econometrica*, Menasha **15**, 342—360 (1947).

Verf. untersucht die durch die einseitig begrenzte Normalverteilung gegebene zweiparametrische Schar von Überlebenswahrscheinlichkeiten

$$M(t) = \Phi(wt - h) \cdot \Phi(-h),$$

wobei

$$\Phi(t) = \int_t^{\infty} \varphi(s) ds, \quad \varphi(t) = \exp[-t^2/2] / \sqrt{2\pi}.$$

Ihre Parameter w, h sind mit der mittleren Lebensdauer = Mittelwert L und der Streuung σ^2 der mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(t) = -M'(t)$ verteilten Lebensdauer t verknüpft durch die Beziehungen

$$L = [h + \varphi(-h)/\Phi(-h)]/w,$$

$$\sigma^2 = [1 - h \varphi(-h)/\Phi(-h) - \varphi^2(-h)/\Phi^2(-h)]/w^2;$$

die Lebenserwartung eines Individuums im Alter x ist

$$L \cdot [\varphi(wx/L - h)/\Phi(wx/L - h) - (wx/L - h)]/w.$$

Für $h \rightarrow -\infty$ geht $f(t) \rightarrow \exp(-t)$. Ein Beispiel zeigt die Anwendung der Resultate zur schnellen Bestimmung des einer beobachteten Überlebens- oder Sterbetafel entsprechenden besten Wertes des Parameters h . *M. P. Geppert* (Bad Nauheim).

Esnault-Pelterie, R.: Remarques sur une formule usuelle. *C. r. Acad. Sci., Paris* **224**, 1404—1407, 1462—1464 (1947).

Seien a, b zwei allele Gene in einer panmiktischen Bevölkerung und $\delta = 2\tau - 1$ der in beiden Geschlechtern gleiche Unterschied der Gametenquoten a, b und gleichzeitig der Homozygotenquoten aa, bb , so ist die Genotypenverteilung mindestens von der nächsten Generation ab konstant:

$$aa: x = \tau^2; \quad ab: h = 2\tau(1 - \tau); \quad bb: y = (1 - \tau)^2.$$

Verf. diskutiert an Beispielen die zahlenmäßige Auswirkung einer durch eine Gleichung der Form $\Delta x, x = V \cdot t$ (t = Zeitraum zwischen zwei Befruchtungsschüben), also nach Übergang zu Differentialen $t = 2 \cdot \ln(\tau/\tau_0) / V$, charakterisierten Bevorzugung des Gens a , die bekanntlich zur totalen Ausmerzung des Gens b führt.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Esnault-Pelterie, R.: Sur la répartition des produits d'un ensemble de fécondations avec croisements libres. *C. r. Acad. Sci., Paris* **224**, 1796—1799 (1947).

Fortsetzung der vorsteh. besprochenen Note. Im Falle inhomogener Paarungswahrscheinlichkeiten lautet die Genotypenverteilung

$$x_1 = (1 + \alpha) \tau^2 D, \quad h_1 = 2(1 + \gamma) \tau(1 - \tau) D, \quad y_1 = (1 + \beta) (1 - \tau)^2 D$$

$$\text{mit} \quad D = (1 + \alpha) \tau^2 + 2(1 + \gamma) \tau(1 - \tau) + (1 + \beta) (1 - \tau)^2.$$

Aus der Differenz $\Delta \tau$ des entsprechenden $\tau_1 = x_1 - h_1/2$ und dem ursprünglichen τ gewinnt Verf. durch den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ bei konstantem α, β, γ für τ die Differentialgleichung

$$d\tau/dt = (\alpha - \gamma)/X + (1 + \gamma)/\tau X - 1/\tau$$

$$\text{mit} \quad X = a\tau^2 + b\tau + c, \quad a = 2\gamma - \alpha - \beta, \quad b = \alpha + 2\beta - 3\gamma, \quad c = \gamma - \beta.$$

Auf die Diskussion ihres leicht angebbaren allgemeinen Integrals verzichtet Verf. infolge eines Rechenfehlers bei der Bestimmung des für die Form desselben maßgebenden Ausdruckes

$$b^2 - 4ac = (\alpha - \gamma)^2 = (c - a)^2;$$

statt dessen werden vier biologisch wichtige Spezialfälle: I. $\beta = 0$, $\gamma = \alpha$; II. $\beta = \gamma = 0$; III. $\alpha = \gamma = 0$; IV. $\alpha = 0$, $\beta = \gamma$ behandelt. *M. P. Geppert.*

Esnault-Pelterie, R.: Sur la répartition des produits d'un ensemble de fécondations avec croisements libres. C. r. Acad. Sci., Paris **225**, 14—16 (1947).

Fortsetzung der beiden vorstehend besprochenen Noten. Nach Analyse eines weiteren Spezialfalles V. $\alpha = \beta = 0$ erfolgen Andeutungen über die Ausdehnung der nicht ganz neuen Resultate auf den allgemeineren Fall von drei und mehr Allelen. *M. P. Geppert (Bad Nauheim).*

Anderson, R. L.: Use of variance components in the analysis of hog prices in two markets. J. Amer. statist. Assoc. **42**, 612—634 (1947).

Das der Wirtschaftsstatistik entnommene Zahlenmaterial besteht aus $5 \cdot 12 \cdot 2 \cdot 5 = 600$ Werten, die je einer Kombination eines 5-, eines 12-, eines 2- und eines 5-stufigen Einteilungsprinzips entsprechen. Verf. führt an dem Material eine Vier-Faktoren-Varianzanalyse durch, prüft hierbei die auftretenden Haupt- und Wechselwirkungen zunächst mittels des F - oder z -Testes auf Zufalls- bzw. systematischen Charakter und entwickelt zur weiteren Deutung der Varianzkomponenten eine auf den t -Test aufgebaute Methode.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Geometrie.

Elementargeometrie:

Couteur, K. J., le: A geometrical problem. Math. Gaz., London **31**, 261—265 (1947).

Es sei ein konvexes n -Eck $P_1 \dots P_n$ vom Umfang L vorgegeben. Es werden Bedingungen angegeben, denen dasjenige n -Eck $P'_1 \dots P'_n$ von vorgegebenem Umfang $L' < L$ Genüge leistet, für das die Summe $P_1 P'_1 + \dots + P_n P'_n$ den kleinstmöglichen Wert annimmt.

L. Fejes Tóth (Budapest).

Thébault, V.: Sur les hauteurs du tétraèdre. Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. s. **62**, 19—23 (1948).

Verf. betrachtet neben einem Grundtetraeder $T(A_i A_k A_l A_m)$ die vier Tetraeder $T_i(B_i A_k A_l A_m)$, $i = 1, 2, 3, 4$, wo B_i den zweiten Schnittpunkt der von A_i ausgehenden Höhe mit der Umkugel von T bedeutet, und beweist u. a., daß das Fußpunktstetraeder des Zwölfpunktekugelmittelpunktes F von T und das von den Mongeschen Punkten von $T_1; T_2; T_3; T_4$ gebildete Tetraeder ortholog und ähnlich sind. Es wird auch der Fall untersucht, daß F der Cayleyschen Fläche von T angehört und dementsprechend sein Fußpunktstetraeder in eine ebene Figur ausartet. Weiterhin werden die Ergebnisse für ein orthozentrisches Tetraeder spezialisiert. Endlich zitiert und beweist Verf. einen Satz von R. Bouvaist, welcher sich auf ein Tripel Simonscher Ebenen von T bezieht.

E. Egerváry (Budapest).

Bradley, A. Day: Great circle trigonometry. Scripta math., New York **13**, 64—70 (1947).

Mit Hilfe des sphärischen Kosinussatzes leitet Verf. fertige Lösungsformeln für folgende, navigationstechnisch wichtige Aufgaben her: Die Pole eines Großkreises zu finden, dessen zwei Punkte gegeben sind. Aus der einen Koordinate (Länge oder Breite) eines auf gegebenem Großkreise liegenden Punktes die andere zu berechnen. Auf einem gegebenen Großkreise eine äquidistante Punktreihe zu bestimmen. Zu jeder Aufgabe wird ein durchgerechnetes Zahlenbeispiel beigelegt.

E. Egerváry (Budapest).

Projektive Geometrie:

Edge, W. L.: The Klein group in three dimensions. *Acta math.*, Uppsala **79**, 153—223 (1947).

Die nicht-zyklischen einfachen Gruppen niedrigster Ordnung sind die Ikosaeder-Gruppe und die Kleinsche Gruppe 168. Ordnung. Diese läßt sich durch zwei Erzeugende e und f mit den Relationen $e^7 = f^2 = (ef)^3 = (e^4f)^4 = 1$ darstellen. Sie war bereits Galois bekannt. Klein hat sie als Gruppe ternärer Substitutionen gedeutet. Verf. gibt nun ein (spezielles) Netz von Quadriken im dreidimensionalen Raume an, das gerade eine Kleinsche Gruppe von linearen Substitutionen in sich gestattet. Die Netze von Quadriken hat Verf. in einer Reihe von früheren Arbeiten [dies. Zbl. **16**, 39, 322; **17**, 184; **19**, 229; **27**, 241] untersucht. Durch diese Deutung gewinnt die Kleinsche Gruppe in ähnlichem Maß an Anschaulichkeit und Überschaubarkeit, wie die \mathfrak{A}_5 durch ihre Deutung als Ikosaedergruppe. — Verf. führt uns durch einen wundervoll gegliederten Bau einer reichen Fülle von einzelnen Erscheinungen, die aufzuzählen Ref. sich versagen muß. Ein Haupthilfsmittel ist die projektive Beziehung zwischen den Quadriken des Netzes und den Punkten einer Ebene. Den in Kegel ausgearteten Quadriken entsprechen die Punkte einer Kurve k ; ihre Scheitel erfüllen eine Kurve K . Denjenigen Quadriken, die eine feste Ebene berühren, entsprechen die Punkte einer Kubik, die k in 6 Punkten berührt. Zu diesen Kubiken gehören 36 Oktupel von in- und einbeschriebenen Dreiecken, von denen in unserem Spezialfall ein Oktupel aus Dreiecken besteht, deren Ecken Wendepunkte und deren Seiten Wendetangenten sind. Ihnen entsprechen Dreiecke, deren Ecken auf K liegen und deren Seiten K berühren. — Die 8 Ebenen dieser Dreiecke bilden die Basisebene eines Netzes von Flächen 2. Klasse, des zu dem Ausgangsnetz dualen. Die oskulierenden Ebenen in den Ecken des Dreiecks (die dort 5punktig berühren) schneiden sich in einem Basispunkt. — Verf. untersucht weiter die Untergruppen der Kleinschen Gruppe, vor allem zunächst die Involutionen. Sie sind alle biaxial und lassen keinen Basispunkt fest. Zu je dreien bilden sie Vierergruppen. Weiter werden die zyklischen Untergruppen der Ordnungen 3 und 7, sowie die Unter-Oктаedergruppen bestimmt. — Ferner untersucht Verf. die Invarianten und Kovarianten der Gruppe. Es gibt eine vom 4., eine vom 6., 3 vom 8. und 2 vom 10. Grade. Schließlich betrachtet Verf. kovariante Geraden-Komplexe.

Ott-Heinrich Keller (Dresden).

Pedoe, D.: On a new analytical representation of curves in space. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **43**, 455—458 (1947).

Data in un S_3 una curva algebrica C , le rette che si appoggiano a C hanno coordinate plückeriane p_{ik} soddisfacenti ad un'equazione $G(\dots p_{ik} \dots) = 0$, dove $G(\dots p_{ik} \dots)$ è una forma nelle p_{ik} . L'A. dimostra come dall'equazione $G(\dots p_{ik} \dots) = 0$ si possa trarre quella del cono proiettante la curva C da un punto generico di S_3 e quindi la rappresentazione analitica (in coordinate di punto) di C .

Mario Villa (Bologna).

Algebraische Geometrie:

Hsiung, C. C.: On triplets of plane curvilinear elements with a common singular point. *Quart. J. Math. (Oxford Ser.)* **18**, 129—132 (1947).

Date tre curve piane C_1, C_2, C_3 aventi in un punto $O(0, 0)$ singolarità di specie differenti, con la stessa tangente $y = 0$, di equazioni $y = a x^\lambda + \dots$, $y = b x^\mu + \dots$, $y = c x^r + \dots$ (λ, μ, r numeri razionali distinti > 1). P.A. dimostra che l'espressione $a^{\mu-r} b^{\mu-\lambda} c^{\lambda-r}$ è un invariante proiettivo associato al punto O di C_1, C_2, C_3 . Considerando opportune curve algebriche P.A. dà interpretazioni geometriche dell'invariante considerato nei vari casi.

Mario Villa (Bologna).

Lilley, S.: On the construction of algebraic curve branches of given composition. J. London math. Soc. **22**, 67—74 (1947).

Die Struktur eines algebraischen Kurvenzweiges (aKZ) in einem d -dimensionalen Raum R_d , dessen Ursprung im Punkt O_1 liegt, wird durch Angabe der „Nachbarpunkte“ O_2, \dots, O_n und der zugehörigen Multiplizitätenfolge (MF) $v_1, v_2, \dots, v_n (= 1)$ beschrieben (vgl. v. d. Waerden, Einführung in die algebraische Geometrie, Berlin 1939, S. 239ff.; dies. Zbl. **21**, 250). Die „Nachfolger“ von O_i sind die Punkte $O_{i+1}, \dots, O_{i+\lambda_i}$ mit $v_i = v_{i+1} + \dots + v_{i+\lambda_i}$; die Reihe der natürlichen Zahlen v_1, \dots, v_n muß derartige Bedingungen erfüllen, um eine „mögliche“ MF eines aKZ zu sein. Das Maximum q aller λ_i heißt „Typus“ der MF. — Das Ergebnis von J. A. Todd [On algebraic curve branches, J. London math. Soc. **21**, 233—240 (1946)], daß zu jeder möglichen MF vom Typus q ein aKZ in einem R_d ($d \geq q$) konstruiert werden kann, wird hier auf anderem Wege gewonnen, indem zuerst formal die Nachbareigenschaften (entsprechend der gegebenen MF) der Punkte O_1, \dots, O_n durch Einschaltung von Symbolen T_i, S_j ($i, j = 1, \dots, d$) festgelegt werden. Deutet man sodann S_j als Translation ($y_j = x_j - a_j, y_k = x_k$ ($k \neq j$)) und T_i als Cremona-Transformation ($y_i = x_i, y_k = x_k/x_i$ ($k \neq i$)), so leisten die eingeschalteten Symbole $\dots T_i S_j \dots$ die Transformation eines aKZ der gegebenen Struktur in einen linearen aKZ, und umgekehrt erhält man aus einem linearen aKZ durch die inverse Operation einen aKZ mit der vorgegebenen MF. Den mehrfachen Möglichkeiten von Einschaltungen entsprechen verschiedene Konstruktionsmöglichkeiten. Gröbner.

Lo Voi, A.: Sulla irregolarità delle superficie multiple cicliche e lo scioglimento della torsione delle superficie algebriche. I. und II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fisic. mat. natur., VII. s. **3**, 223—228, 228—230 (1947).

Es bedeute $f(x, y, z) = 0$ eine algebraische Fläche der Irregularität q . Durch Adjunktion eines nicht verzweigten Radikals $u = \sqrt[t]{\varphi(x, y, z)}$ konstruiert Verf. eine zyklische mehrfache Fläche und zeigt, daß deren Irregularität $t \cdot q$ ist. Er zeigt weiter, daß man durch derartige Adjunktionen zu torsionsfreien Flächen aufsteigen kann, daß also jede Fläche als Bild einer Involution auf einer torsionsfreien Fläche aufgefaßt werden kann. Verf. gelangt durch Benutzung topologischer Hilfsmittel zu sehr übersichtlichen Beweisen. Ott-Heinrich Keller (Dresden).

Goddard, L. S.: Prime ideals and postulation formulae. Proc. Cambridge philos. Soc. **44**, 43—49 (1948).

Setzt man $z_{i_1} \dots z_{i_p} = x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_r}^{(r)}$, wo $x_{i_\sigma}^{(\sigma)}$ die homogenen Koordinaten eines projektiven Raumes P_{n_σ} bedeuten, so beschreibt z eine Segresche Mannigfaltigkeit V_d der Gattung r , welche ein projektives Modell des Produktes der r projektiven Räume $P_{n_1} \dots P_{n_r}$ ist [Bertini, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, 2^a ed. Messina 1923, S. 380ff.]. Verf. erweitert die Ergebnisse seiner vorausgehenden Arbeit [Proc. Cambridge Philos. Soc. **29**, 35 (1943)] und konstruiert die Basis des Primideals \mathfrak{P} , dessen Nullstellenmannigfaltigkeit eine beliebige $V_{d-1} \subset V_d$ ist, wobei er von der Tatsache ausgeht, daß V_{d-1} in den x durch eine einzige Gleichung $C(x^{(1)}; \dots; x^{(r)}) = 0$ definiert wird. Hat diese in $x^{(\sigma)}$ den Grad λ_σ und ist $\mu = \max \{\lambda_\sigma\}$, so enthält die Basis von \mathfrak{P} außer den quadratischen Formen, welche V_d bestimmen, noch weitere $N = \Pi \binom{n_\sigma + \mu - \lambda_\sigma}{n_\sigma}$ Formen $f(z)$ des Grades μ . Ein ähnliches Resultat gilt für Veronesesche Mannigfaltigkeiten. Zum Schluß berechnet Verf. die zugehörigen Postulationsformeln (Hilbertfunktionen). Gröbner.

Segre, B.: Caratterizzazione geometrica degli integrali abeliani e dei loro residui. I. und II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. **3**, 167 bis 172, 172—179 (1947).

Die Residuen eines Abelschen Differentials dI auf einer algebraischen Kurve C werden folgendermaßen geometrisch gedeutet. Sei α die Gruppe der Nullstellen,

β die der Pole von dI , bestehend aus $b + 2p - 2$ bzw. b Punkten. Die Vollschar $[\lambda] = [\beta + \alpha]$ (mit einer kanonischen Gruppe z) ist eine g_μ^μ mit $\mu = b + 2p - 2$, $r = b + p - 2$; sie liefert als birationales Bild von C eine singularitätenfreie Kurve I' der Ordnung μ im Raume S_r . Das Bild von α ist der Schnitt von I' mit einer Überebene S'_{r-1} . Die Bilder der Punkte von β gehören einem S_{b-2} an. Sind sie alle verschieden und M_1 und M_2 zwei von ihnen, so sei N der Schnittpunkt der Geraden $M_1 M_2$ mit dem Raum S_{b-3} durch die Bilder der übrigen Punkte von β und N' der Schnitt von $M_1 M_2$ mit S'_{r-1} . Die Residuen von dI in M_1 und M_2 verhalten sich zueinander wie das Doppelverhältnis $(M_1 M_2 N N')$ zu -1 . Der Satz, daß die Summe der Residuen von dI gleich Null ist, ist damit zurückgeführt auf den folgenden Satz der projektiven Geometrie: Sind im Raume S_r eine Überebene S_{r-1} und $r + 2$ Punkte M_i gegeben, von denen keiner in S_{r-1} liegt und je $r + 1$ linear unabhängig sind; sind ferner N_{ij} und N'_{ij} die Schnittpunkte der Geraden $M_i M_j$ mit der Überebene durch die übrigen Punkte M_k bzw. mit S_{r-1} ; so kann man Zahlen $\varrho_i \neq 0$ derart angeben, daß das Doppelverhältnis $(M_i M_j N_{ij} N'_{ij}) = -\varrho_i \varrho_j$ wird, und die Summe dieser Zahlen ist gleich Null. Ein einfacher Beweis dieses Satzes wird gegeben. Die Besonderheiten der niedrigsten Fälle, $b = 2$ und $p = 0$, werden angemerkt und die für den Fall zusammenfallender Pole nötige Verallgemeinerung ebenfalls formuliert und bewiesen.

H. Kneser (Tübingen).

Differentialgeometrie in euklidischen Räumen:

Hsiung, Chuan-Chih: Plane sections of the tangent surfaces of two space curves. Duke math. J. 14, 151—158 (1947).

Zwei Kurven C, C' mögen in dem gemeinsamen Schnittpunkt P die gleiche Schmiegungebene haben. Eine beliebige Ebene π , die nicht durch P geht, schneidet die Tangentenflächen von C und C' in zwei Kurven I, I' , die die gemeinsame Schmiegungebene in Q, Q' berühren und in diesen Punkten eine gemeinsame Tangente haben. Sind K_1, K_2 vierpunktig berührende Kegelschnitte von I, I' in Q, Q' , so nennt Verf. den Schnittpunkt S der Polaren von Q bez. I und der Polaren von Q' bez. I' einen Hauptpunkt. Unter den vierpunktigen Kegelschnitten gibt es nun je einen Hauptkegelschnitt, der durch den zugehörigen Hauptpunkt S geht. Verf. beweist den Satz: Dreht sich π um die Gerade $Q Q'$, so erzeugen die beiden Hauptkegelschnitte je einen Kegel 2. Ordnung. — Sind C, C' die Asymptotenlinien einer Fläche, so wird jeder Geraden $Q Q'$ der Tangentenebene eines Flächenpunktes P ein Kegelpaar zugeordnet, deren jeder die Tangentenebene von P längs einer Haupttangente berührt. (Anm. d. Ref.: Welcher Zusammenhang zwischen diesen Kegelpaaren und den Krümmungskegeln des Flächenpunktes P [Ref., Math. Z. 33, 232—270 (1931) und B. Su, Japan. J. Math. 9, 38—56 (1933)] besteht, wird nicht untersucht; vermutlich gibt es eine Gerade $Q Q'$, deren Kegelpaar mit den Krümmungskegeln zusammenfällt.)

Haack (Bad Gandersheim).

Kasner, Edward and John de Cicco: Physical families of curves in space. Proc. nat. Acad. Sci. USA 34, 68—72 (1948).

Verff. übertragen ihre Betrachtungen über ebene physikalische Kurven [Proc. nat. Acad. Sci. USA 33, 246—251 (1947)] auf den dreidimensionalen Raum. In einem gegebenen Kraftfeld soll sich ein Teilchen der Masse Eins so bewegen, daß stets der Feldvektor in der Schmiegungebene der Bahnkurve liegt und der Druck P die Bedingung erfüllt $P = k \cdot N$, wenn N die Komponente des Feldvektors in Richtung der Hauptnormalen bedeutet. Ist v die Geschwindigkeit und r der Krümmungsradius der Bahn, so ist $P = v r^2 = N$. Durch Elimination von v ergeben sich zwei Differentialgleichungen 2. und 3. Ordnung für die Koordinaten $y(x), z(x)$ der Bahn-

folgendermaßen: „Man kann die Flächenelemente E_l und E_r der Kugeln π_l , π_r oder der Ebenen π_l , π_r als Bilder der ∞^1 zueinander „parallelen“, d. h. zur Geraden g normalen Flächenelemente E des elliptischen Raumes auffassen und diese Bilder auf folgende Art definieren: E_l ist jenes Flächenelement der Kugel π_l bzw. der Ebene π_l , das aus E durch Rechtsschiebung entsteht, während E_r jenes Flächenelement von π_r bzw. π_r ist, das aus E durch Linksschiebung entsteht. Ersetzt man die Flächenelemente E_l , E_r durch ihre Berührungspunkte, so erhält man genau die Studyschen Bilder G_l , G_r jener Geraden g des elliptischen Raumes, welche zu den ∞^1 „parallelen“ räumlichen Flächenelementen E normal sind“. Da sich in dieser Auffassung die Abbildung von Study-Fubini-Hjelmstedt ohne weiters auf den isotropen Raum übertragen läßt, gewinnt Verf. damit ein wichtiges Übertragungsprinzip für die isotrope Raumgeometrie. Doch beschränkt sich der Gang der Untersuchungen der vorliegenden Arbeit auf eine eingehende Behandlung der algebraischen und gruppentheoretischen Eigenschaften der Abbildung der Flächenelemente E des isotropen Raumes auf die Punktepaare E_l , E_r zweier vereinigter (nichtisotroper) Ebenen $\pi_l = \pi_r = \pi$. Diese „parataktische“ Abbildung wurde als flächentreue Abbildung bereits früher von G. Scheffers in wesentlich engerem Rahmen studiert [vgl. G. Scheffers, Flächentreue Abbildungen in der Ebene, Math. Z. 2, 180—186 (1918)]. Für G. Scheffers war dabei der Ausgangspunkt die Eigenschaft parataktischer Abbildungen, zweidimensionale Elementvereine, d. h. die berührenden Flächenelemente E eines Punktes, einer Kurve oder einer Fläche auf eigentlich-flächentreue Verwandtschaften $E_l \rightarrow E_r$ der Bildebene π zu übertragen. Da es im Rahmen dieses Referates unmöglich ist, die zahlreichen Ergebnisse der ange deuteten Untersuchungen des Verf. zu besprechen, sei hier nur noch die Gliederung der ganzen Untersuchung wiedergegeben: I. Einführung in die Metrik und Kinematik des isotropen Raumes, II. Die parataktische Abbildung der regulären Flächenelemente E des isotropen Raumes auf die Punktepaare (E_l, E_r) der Ebene, III. Die parataktischen Bilder der isotropen Grundinvarianten, IV. Die linearen Mannigfaltigkeiten von Flächenelementen des isotropen Raumes und ihre parataktischen Bilder, V. Die parataktischen Bilder einiger Transformationsgruppen des isotropen Raumes, VI. Bemerkungen über die Bedeutung der parataktischen Abbildung der Flächenelemente des isotropen Raumes für die Theorie der flächentreuen Verwandtschaften der Ebene. — Verf. beabsichtigt von den erzielten Resultaten eine ausgedehnte Anwendung auf die Differentialgeometrie des isotropen Raumes und deren Zusammenhänge mit der Theorie der (eigentlich-)flächentreuen Abbildungen der (euklidischen) Ebene zu geben. Als Vorläufer dieses Programms ist bereits der Vortrag des Verf. „Über die flächentreuen Abbildungen der Ebene“ [vgl. K. Strubecker, Bull. math. Soc. Roumaine Sci. 44, 59—70 (1942)] anzusehen. M. Pöhl (Köln).

Finikoff, S.: Certain periodic sequences of Laplace of period six in ordinary space. Duke math. J. 14, 807—835 (1947).

Verf. ordnet einer Fläche M eine zweite Fläche M' umkehrbar eindeutig derart zu, daß die Haupttangente von M die Tangente eines konjugierten Netzes von M' schneiden. Dadurch ist unmittelbar ein begleitendes Tetraeder gegeben, dessen Ecken aus M , M' und den beiden Tangentenschnittpunkten M_1 , M_2 gebildet werden. Die Asymptotenlinien von M und das konjugierte Netz von M' nennt Verf. ein $a-c-d$ Netz. Die Flächen M' , die mit einer beliebigen Fläche M ein $a-c-d$ Netz bilden, hängen von 4 willkürlichen Funktionen einer Variablen ab; dabei wird die Geradenkongruenz (M, M') durch zwei, die Lage der Punkte M' auf den Geraden durch zwei weitere willkürliche Funktionen festgelegt. Umgekehrt lassen sich auch jeder beliebigen Fläche M' durch 4 willkürliche Funktionen einer Variablen solche Flächen M zuordnen, die mit M' ein $a-c-d$ Netz bilden. — Durch die zusätzliche Forderung, daß das konjugierte Netz M' einer Laplace-Folge der Periode 6 angehört, bei der die Kongruenz (M, M') Achsenkongruenz und (M_1, M_2) Strahlenkongruenz des Netzes M' ist, wird die Zuordnung $M \rightarrow M'$ zur Perspektivität. Zu einer Fläche M , die einem System von Diff.-Gleichungen genügen muß, gibt es im allg. nur eine einzige Fläche M' , die die Forderungen erfüllt. Im zweiten Teil stellt Verf. das definierende System von Differentialgleichungen einer Laplace-Folge der Periode 6 auf, dessen Lösung von 14 willkürlichen Funktionen einer Variablen abhängt. Es werden folgende Sonderfälle behandelt: 1. Die Folge enthält 6 harmonische Netze; 2. die Fokalnetze der Folge haben gleiche Punkthinvarianten; 3. ein Netz der Folge ist harmonisch mit gleichen Invarianten. In einer Folge der Periode 6 gibt es entweder kein, oder zwei gegenüberliegende oder 6 Netze mit gleichen Invarianten. Haack.

Kasner, Edward and John de Cicco: Groups of harmonic transformations. Duke math. J. 14, 327—338 (1947).

Eine Transformation T der reellen oder komplexen Cartesischen Ebene, $X = \Phi(x, y)$, $Y = \Psi(x, y)$ nennen Verff. harmonisch, wenn Φ und Ψ der Laplace-schen Differentialgleichung genügen. Erfüllen Φ und Ψ gleichzeitig die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, so ist T konform. Verff. bestimmen in der Menge (H) der harmonischen Transformationen diejenigen Untermengen, die zu jeder Transformation T die inverse enthalten, ferner alle Transformationsgruppen, die in (H) enthalten sind. Außer der konformen Gruppe gibt es in (H) zwei infinite Gruppen harmonischer Transformationen, die sich je um einen willkürlichen Parameter von der konformen unterscheiden, und schließlich die 6-gliedrige affine Gruppe.

Haack (Bad Gandersheim).

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Wang, Hsien-Chung: The projective deformation of non-holonomic surfaces. Duke math. J. 14, 159—166 (1947).

Verf. versteht unter einer nichtholonomen Fläche des dreidimensionalen projektiven Raumes eine dreiparametrische Schar von Berührungselementen und nennt die Zuordnung der Berührungselemente zweier nichtholonomen Flächen S und \bar{S} eine projektive Deformation (der einen Fläche in die andere), wenn dabei zu jedem Paar zugeordneter Elemente E und \bar{E} von S und \bar{S} eine projektive Transformation gehört, die E in \bar{E} und die Nachbarschaft erster Ordnung von E in die von \bar{E} überführt. Sodann ist eine Automorphie $P \leftrightarrow \bar{P}$ des projektiven Raumes eine projektive Deformation zweier nichtholonomen Flächen S und \bar{S} , wenn zu jedem Paar entsprechender Punkte A und \bar{A} eine projektive Transformation $T(A)$ existiert, derart, daß sie 1. A in \bar{A} und die Tangentialebene von S in A in die von \bar{S} in \bar{A} überführt und 2. unter Vernachlässigung von Größen höherer als erster Ordnung auch jeden Nachbarn A' von A in den entsprechenden \bar{A}' und dazu die Tangentialebene von S in A' in die von \bar{S} in \bar{A}' überführt. — Sodann bilden vier Punkte A, A_1, A_2, A_3 des projektiven Raumes mit der Koordinatendeterminante 1 nach E. Cartan ein projektives Bezugssystem und insbesondere ein reguläres Bezugssystem in A , wenn die durch die Determinanten dritter Ordnung aus $[A, A_1, A_2]$ gegebene Ebene mit der Tangentialebene der Fläche S im Punkt A zusammenfällt. Die Gesamtheit aller derartigen regulären Bezugssysteme genügt einem System von vier Pfaffschen Gleichungen, deren Koeffizienten $\omega_0^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega_1^0, \omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \omega_2^0, \omega_2^1, \omega_2^2, \omega_2^3, \omega_3^0, \omega_3^1, \omega_3^2, \omega_3^3$ die sog. relativen Komponenten darstellen. Als gewisse Pfaffsche Formen sind diese Koeffizienten Funktionen der Ortskoordinaten von A und weiterer zehn „sekundärer“ Parameter t_1, \dots, t_{10} . — Sodann gilt der Satz: Eine notwendige und hinreichende Bedingung für eine projektive Deformation zweier nichtholonomen Flächen S und \bar{S} besteht darin, daß zu einer Schar regulärer Bezugssysteme von S eine Schar regulärer Bezugssysteme von \bar{S} existiert, derart, daß auf Grund der angenommenen Zuordnung die Relationen: $\omega^1 = \bar{\omega}^1, \omega^2 = \bar{\omega}^2, \omega^3 = \bar{\omega}^3, \omega_1^3 = \bar{\omega}_1^3, \omega_2^3 = \bar{\omega}_2^3$ gelten. Ferner gilt: Jede nichtholonome Fläche ist projektiv deformierbar. Die zu einer gegebenen nichtholonomen Fläche deformierbaren nichtholonomen Flächen hängen von vier Funktionen zweier Argumente, fünf Funktionen eines Argumentes und fünf willkürlichen Konstanten ab. — Zum Schluß behandelt Verf. noch einige geometrische Spezialfragen und gewinnt insbesondere noch eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Abbildung der (getrennt und reell vorausgesetzten) Asymptotenrichtungen zweier nichtholonomen Flächen S und \bar{S} aufeinander eine projektive Transformation sei.

M. Pinl (Köln).

Egorov, I. P.: Über die Ordnung der Bewegungsgruppen der Räume von affinem Zusammenhang. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 57, 867—870 (1947) [Russisch].

In Verallgemeinerung zu bekannten Ergebnissen über vollständige Bewegungsgruppen in Riemannschen Räumen untersucht Verf. die Ordnung stetiger Liescher Gruppen, welche vollständige Bewegungsgruppen sind, in affin-zusammenhängenden Räumen. Sein Hauptergebnis ist: Die Ordnung der vollständigen Bewegungsgruppen n -dimensionaler Räume affinen Zusammenhangs, die nicht affin-euklidisch sind, hat n^2 zur genauen oberen Grenze. Dabei wird natürlich erst definiert, was unter Bewegungsoperatoren in den betrachteten Räumen verstanden werden soll. Der Beweis beruht auf Aussagen algebraischen Charakters über eine mit den Integrierbarkeitsbedingungen des angesetzten Gleichungssystems zusammenhängende Matrix.

Süss (Freiburg i. Br.).

Levine, Jack: Invariant characterizations of two-dimensional affine and metric spaces. Duke math. J. 15, 69—77 (1948).

Nach T. Y. Thomas kann die algebraisch-invariante Kennzeichnung einer Eigenschaft eines differentialgeometrischen Raumes durch $P_1 = 0$, $P_2 \neq 0$ beschrieben werden. P_i sind dabei Polynomsysteme, die durch die Krümmungsgrößen und ihre kovarianten Ableitungen bestimmt sind. Verf. ändert diese Definition in $P_0 = 0$ oder $P_0 \neq 0$, $P_1 = 0$ und $P_2 \neq 0$ ab. Die Methode, die zu diesen Gleichungen führt, beruht auf den von Veblen und Thomas herrührenden Betrachtungen bei der Lösung von Äquivalenzproblem von differentialgeometrischen Räumen [O. Veblen und J. M. Thomas, Ann. Math., Princeton, II. s. 27, 279—296 (1926)] und besteht in der Betrachtung von gemischten Differentialgleichungssystemen. Die Bedingung für die Verträglichkeit ergibt eine Kette von Gleichungen, deren Resultate gerade auf die obigen Bedingungen führt. Es bezeichne A_2 einen zweidimensionalen affinen Raum. Verf. charakterisiert: 1. eine A_2 , die ein Feld von parallelen kontravarianten Vektoren gestattet; 2. jene A_2 , deren Bahnkurven lineare und homogene erste Integrale gestatten; (aus 2. ergeben sich Bedingungen für die Existenz von ein- und zweiparametrischen Bewegungsgruppen); 3. jene A_2 , die eine metrische Darstellung zulassen, d. h. für die es einen Fundamentaltensor gibt, dessen Christoffelsche Symbole gerade die Übertragungsparameter des A_2 sind.

O. Varga (Debrecen).

Ruse, H. S.: Multivectors and catalytic tensors. Philos. Mag., J. Sci., London VII. s. 38, 408—421 (1947).

E. T. Whittaker bewies für den 4-dimensionalen Galileischen Zeitraum (On the relations of the tensor-calculus to the spinor-calculus, Proc. R. Soc. London A 158, 38—46 (1937); dies. Zbl. 16, 79) gewisse Tensorrelationen mit Hilfe der Spinorenrechnung. Verf. zeigt nun, daß Whittakers Bemerkung, daß diese Relationen durch ausschließliche Methoden der Tensorrechnung ohne Verwendung von „katalytischen“ Tensoren unmöglich ist und dabei ein zur Quadratwurzelziehung ähnlicher Prozeß verwendet werden muß, nicht stichhaltig ist. In der Tangentialebene in einem Punkte eines 4-dimensionalen Riemannschen Raumes R_4 betrachtet Verf. die Ebene S_3 . Die Bivektoren im Punkte des R_4 können in S_3 als gerade Linien gedeutet werden. Durch den Fundamentaltensor g_{ik} im Raum R_4 wird im Linienraum des S_3 ein quadratisches Fundamentalgebilde ausgezeichnet. Durch einfache liniengeometrische Betrachtungen, die sich im wesentlichen auf die beiden erzeugenden Scharen des Fundamentalgebildes stützen, leitet Verf. zwei Whittakersche Relationen her. Wir geben die eine an: Sind P^{ij} und Q^{ij} zwei einfache Bivektoren, die bzw. selbst-dual und „anti-selbst-dual“ sind, dann gilt $P^{ik}Q^{kl} = \alpha D^i D^l$, wobei D^i ein Nullvektor ist. Verf. gelingt auch die Herleitung von Tensorrelationen, die kovariante Ableitungen enthalten, unter Beschränkung auf ein und denselben Tangentialraum. Ferner werden außer Bivektoren auch Multivektoren untersucht und die Gültigkeit der Resultate für Riemannsche Räume geradzähliger höherer Dimensionen diskutiert.

O. Varga (Debrecen).

Ruse, H. S.: The self-polar Riemann complex for a V_4 . Proc. London math. Soc., II. s. 50, 75—106 (1948).

In Verfolgung früherer Arbeiten über die Geometrie des Riemannschen Krümmungstensors behandelt Verf. nun folgende Problemstellung: Im 4-dimensionalen Riemannschen Raum V_4 ist jedem Punkt ein 4-dimensionaler Tangentialraum T_4 zugeordnet. In der 3-dimensionalen Fernebene S_3 von T_4 gilt die gewöhnliche projektive Geometrie. Der Riemannsche Krümmungstensor R_{ijkl} bestimmt dann in S_3 den quadratischen Komplex $R_{ijkl} p^{ij} p^{kl} = 0$. Ist g_{ij} der Fundamentaltensor des Riemannschen Raumes, dann werden solche Räume untersucht, deren zugeordnete Komplexe bezüglich des absoluten Gebildes $g_{ij} X^i X^j = 0$ selbstpolar sind. Es gibt zwei Arten solcher selbstpolarer Riemannscher Komplexe, die Verf. selbstpolar von erster bzw. zweiter Art nennt. Die Bedingungen der Selbstpolarität werden natürlich durch gewisse Relationen, denen der Krümmungstensor genügt, ausgedrückt. Verf. zieht nun verschiedene Forderungen aus der Selbstpolarität. Er zeigt u. a., daß der Krümmungstensor und ihm verwandte Tensoren sich als Summe von Quadraten darstellen lassen. Die weiteren Anwendungen gruppieren sich im wesentlichen um Gleichungen der Art $(R_{ijkl} - \mu g_{ijk}) p^{kl} = 0$. Verf. bestimmt die diesen Gleichungen genügenden Hauptbivektoren, durch die sich der Krümmungstensor darstellen läßt. Wie Verf. einleitend bemerkt, sind einige dieser Ergebnisse schon früher von Struik, Lamson und Churchill angegeben worden. *Varga*.

Allgemeine metrische Geometrie:

Varga, O.: Über die Lösung differentialgeometrischer Fragen in der nichteuklidischen Geometrie unter gleichzeitiger Verwendung homogener und inhomogener Koordinaten. Hung. Acta Math. 1, 35—52 (1947).

Werden Differentialinvarianten in einer nichteuklidischen Geometrie durch Grenzübergang aus gewissen Simplexen hergeleitet, so müssen diese Gebilde durch homogene Koordinaten dargestellt werden. Da andererseits sämtliche Differentialinvarianten durch den auf inhomogene Koordinaten angewandten invarianten Differentiationsprozeß gewonnen werden können, untersucht Verf. den Zusammenhang zwischen den invarianten Ableitungen inhomogener und den gewöhnlichen Ableitungen homogener Koordinaten. Der Zusammenhang wird mittels der Gaußschen Ableitungsgleichungen der Flächentheorie gewonnen. Auf Grund dieses Zusammenhanges werden zwei Fragen der n -dimensionalen elliptischen Geometrie behandelt. Die erste betrifft die Darstellung der $(n-1)$ -Krümmungen einer Kurve im Mengerschen Sinne. Sie werden durch Grenzübergang aus der Kurve eingeschriebenen Simplexen gewonnen. Als zweite Frage wird der Zusammenhang zwischen den Krümmungen und den Schmiegunskugelradien einer Kurve ermittelt.

E. Egerváry (Budapest).

Whitney, Hassler: Complexes of manifolds. Proc. nat. Acad. Sci. USA 33, 10—11 (1947).

Verf. weist auf die Schwierigkeiten hin, die sich einer brauchbaren Definition der Begriffs einer berandeten, stetig differenzierbaren Mannigfaltigkeit M entgegenstellen. M zusammen mit ihren Randzellen der verschiedenen Dimensionen bildet einen Komplex K von Mannigfaltigkeiten oder eine complifold, wie Verf. kurz sagt. Sämtliche Zellen von K müssen natürlich stetig differenzierbar sein. Das Grundproblem ist die Angabe von notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß K in einem euklidischen Raum passender Dimension stetig differenzierbar eingebettet werden kann. Verf. formuliert ohne Beweis eine hinreichende Bedingung.

Rinow (Berlin).

Eilenberg, S.: Singular homology in differentiable manifolds. Ann. Math., Princeton, II. s. 48, 670—681 (1947).

M sei eine Mannigfaltigkeit der Klasse $k > 0$ (k -mal stetig differenzierbare M) und $T(s)$ ein stetiges Simplex in M . Ist die Abbildung T auf dem euklidischen Simplex s von der Klasse k , d. h. kann sie auf eine Umgebung U von s so erweitert werden, daß sie in U k -mal stetig differenzierbar ist, so heißt $T(s)$ ein singuläres Simplex der Klasse k . Die Menge aller singulären Simplexe der Klasse k von M bilden einen abgeschlossenen Teilkomplex $S^k(M)$ der Menge $S(M)$ aller stetigen Simplexe von M . Verf. zeigt, daß die Komplexe $S^k(M)$ und $S(M)$ die gleiche Homologiestruktur besitzen. Genauer beweist Verf., indem er Begriffsbildungen und Methoden einer früheren Arbeit benutzt [Verf., Ann. Math., Princeton, II, S. 45, 407—447 (1944)], folgenden Satz: Die identische Kettentransformation, die jeder Kette K von $S^k(M)$ sich selbst als Kette von $S(M)$ zuordnet, ist eine Kettenäquivalenz, d. h. jede Kette von $S(M)$ läßt sich stetig mit Erhaltung der Randbeziehung in eine Kette von $S^k(M)$ überführen. Ein entsprechender Satz gilt auch für die relative Homologietheorie bezüglich einer Untermannigfaltigkeit L der Klasse k von M . Als Nebenergebnis erhält Verf. einen neuen Beweis seines Invarianzsatzes der oben zitierten Arbeit. Rinow (Berlin).

Ehresmann, C.: Sur les espaces fibrés différentiables. C. r. Acad. Sci., Paris 224, 1611—1612 (1947).

Bei einer Faserung hat man zu unterscheiden zwischen der gefaserten Mannigfaltigkeit E , der Faser F und der Zerlegungsmanigfaltigkeit B . Die Faserung heißt differenzierbar, wenn die Mannigfaltigkeiten gewisse hier nicht näher anzugebende Differenzierbarkeits Eigenschaften besitzen. Bei einer differenzierbaren Faserung ist die „natürliche“ Abbildung p von E auf B , die alle Punkte einer Faser auf den ihr entsprechenden Punkt B abbildet, differenzierbar. Umgekehrt gilt der Satz, daß eine differenzierbare Abbildung einer kompakten Mannigfaltigkeit E auf eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit B eine differenzierbare Faserung in E definiert, wenn die Abbildung in jedem Punkte den Rang n hat. — In einer differenzierbaren gefaserten Mannigfaltigkeit gibt es stets Felder von n -dimensionalen Flächenelementen (n = Dimension von B), die die Fasern durchsetzen (nicht berühren). Ein solches „Schnittfeld“ ist i. a. nicht vollständig integrierbar. Es werden Sätze über Schnittfelder aufgestellt, und der Ausnahmefall der vollständig integrierbaren Schnittfelder wird besonders untersucht. H. Schert (Heidelberg).

Whitney, Hassler: Algebraic topology and integration theory. Proc. nat. Acad. Sci. USA 33, 1—6 (1947).

Gedrungte Übersicht einer ausgedehnteren Untersuchung, die die Analogie zwischen den Begriffen um den Stokesschen Integralsatz und denen der algebraischen Topologie zur wirklichen Übereinstimmung steigern will. Die topologischen Begriffe werden eingeschränkt: die aufgestellte Theorie enthält u. a. den Stokesschen Satz als Spezialfall. Zugrunde gelegt wird ein Lipschitz-Raum B , d. i. ein metrischer Raum, der eineindeutiges, beiderseits dehnungsbeschränktes Bild einer Menge in einem Zahlenraum E ist. Lipschitz-Ketten sind solche „singuläre“ Ketten, bei denen die Abbildung der Simplexe in B dehnungsbeschränkt ist. Für solche Ketten A^r wird ein Betrag $|A^r|$ eingeführt, der bei glatten, gekrümmten Simplexen in einem Zahlenraum deren Inhalt ergibt. Eine Lipschitz-Kokette ist eine lineare Funktion $X \cdot A^r$ einer Lipschitz- r -Kette A (mit dem Rand ∂A), die reelle Zahlenwerte hat und bei jedem r - bzw. $(r+1)$ -Simplex σ den Beschränkungen $X \cdot \sigma = X|\sigma|$, $X \cdot \partial\sigma = N'|\sigma|$ mit festem X und N' unterliegt. Der Korand ∂X von X ist eine Lipschitz- $(r-1)$ -Kokette, erklärt durch $\partial X \cdot A^{r-1} = X \cdot \partial A^{r-1}$, das Analogon des Stokesschen Satzes. Bei Unterteilung von A behält $X \cdot A$ seinen Wert. Die auf diese Begriffe gegründete Lipschitz-Kohomologiegruppe ist isomorph der Kohomologiegruppe der algebraischen Topologie. Dies ist ein Gegenstück zu de Rham's Existenzsatz. Die Lipschitz-Koketten können durch eine Folge von Unterteilungen und Grenzübergang abgeleitet werden aus Lipschitz-Skelett-Koketten; das sind

lineare Funktionen von Skelett-Ketten, d. h. Gebilden aus Simplexen, von denen nur die Ecken berücksichtigt werden. Die „Lipschitz“-Beschränkung benutzt dabei ein geeignetes Maß eines Skelett-Simplexes, das sich aus den Abständen der Ecken zusammensetzt. Zwei Lipschitz-Skelett-Koketten führen zu derselben Lipschitz-Kokette, wenn ihr Unterschied bei einem kleinen Simplex von höherer Ordnung klein wird als das Maß des Simplexes. Weiter werden — einfachheitshalber nur im Zahlenraum — Koketten eingeführt, deren Werte Tensoren sind. Mit Hilfe kovarianter Ableitungen von Tensoren ergibt sich eine Theorie, die in koordinatenfreier Form die der Funktionaldeterminante, des Stokesschen Satzes usw. enthält. Begriff und Behandlung von Produkten von Koketten wird angedeutet. Zum Schluß wird ein allgemeiner Stetigkeitssatz ausgesprochen: $|X \cdot B - X \cdot A|$ ist in bestimmter Weise klein, wenn $B - A = cD + C$ ist mit Ketten (nicht notwendig Lipschitzketten) C und D , die sich wenig von ∂A bzw. A entfernen. *H. Kneser.*

Reeb, G.: Sur la variété de niveau d'une fonction numérique. *C. r. Acad. Sci., Paris* **224**, 1324—1326 (1947).

Es sei f eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf einer n -dimensionalen zusammenhängenden geschlossenen Mannigfaltigkeit V_n . f habe nur isolierte singuläre Punkte. Ist \tilde{V} die Vereinigung der singulären Niveaulächen von f , so ist $V_n - \tilde{V}$ homöomorph dem topologischen Produkt aus einer $(n-1)$ -dimensionalen (i. a. nicht zusammenhängenden) Mannigfaltigkeit V_{n-1} und einem offenen Intervall. Durch Betrachtung der Homomorphismenfolge

$$H^p(V_n) \rightarrow H^p(V_n \bmod \tilde{V}) \rightarrow H^{p-1}(\tilde{V}) \rightarrow H^{p-1}(V_{n-1})$$

(H^p = p -te Homologiegruppe mit einem Körper als Koeffizientenbereich) werden unter Berücksichtigung der Relation $H^p(V_n \bmod \tilde{V}) = H^{p-1}(V_{n-1})$ Relationen zwischen den Bettischen Zahlen von V_n , \tilde{V} und V_{n-1} abgeleitet, sowie Relationen für die Typenzahlen der singulären Punkte von f . *H. Seifert (Heidelberg).*

Pólya, G.: Estimating electrostatic capacity. *Amer. math. Monthly* **54**, 201 bis 206 (1947).

Nur bei sehr wenigen Körpern gibt es wie bei der Kugel für die elektrostatische Kapazität C einen einfachen Ausdruck, und auch nur bei wenigen, z. B. Ellipsoid, Linse, Spindel, Torus, ist eine Darstellung durch ein Integral oder eine unendliche Reihe bekannt. Bei vielen einfachen Körpern, darunter Würfel und Zylinder, sind entsprechende Darstellungen nicht bekannt. Pólya und Szegő haben sich die Aufgabe gestellt, mit Hilfe geometrischer Größen, die der Berechnung eher zugänglich sind, die Kapazität eines Körpers in Grenzen einzuschließen und zu approximieren. In dem vorliegenden Vortrag berichtet Pólya über Ergebnisse dieser Untersuchungen, ohne auf Beweise einzugehen. — Als einfache geometrische Größen werden jedem Körper der „Volumenradius“ \bar{V} , d. i. der Radius der Kugel gleichen Volumens, und der „Oberflächenradius“ \bar{S} , d. i. der Radius der Kugel gleicher Oberfläche, zugeordnet, und ferner jedem konvexen Körper der „mittlere Radius“ \bar{M} , d. i. die halbe mittlere Breite, welche nach einem Satz von Minkowski gleich $M/(4\pi)$ ist, wobei M das Oberflächenintegral über die mittlere Krümmung ist. Es werden nun folgende Sätze behandelt: 1. (Satz von Poincaré, bewiesen von Szegő.) Unter den Körpern gleichen Volumens besitzt die Kugel die kleinste Kapazität. Hieraus ergibt sich die Abschätzung $C > \bar{V}$, falls der Körper keine Kugel ist. 2. (Vermutung.) Unter den Körpern gleicher Oberfläche besitzt die Kreisscheibe die kleinste Kapazität. Hieraus würde für Körper, die nicht Kreisscheiben sind, $C > \frac{\sqrt{8}}{\pi} \bar{S}$ folgen. 3. (Satz von Szegő.) Die Kapazität eines konvexen Körpers ist kleiner oder gleich der Kapazität des verlängerten Ellipsoids, dessen große Halbachse \bar{M} und dessen

kleine Halbachse S ist. Hieraus folgt $C' \leq M$ für konvexe Körper, die nicht Kugeln sind, also zusammen mit 1.: $V \leq C' \leq M$, in Analogie zu der bekannten Ungleichung $V \leq S \leq M$. — Für Rotationskörper wird schließlich der „konforme Radius“ r eingeführt. r ist der Radius des Kreises, auf dessen Äußeres sich das Äußere eines ebenen Meridianschnittes des Körpers so abbilden läßt, daß die unendlichfernen Punkte sich entsprechen und das Vergrößerungsverhältnis im Unendlichen 1 ist. Hier wird vermutet, daß $C' \leq (4\pi)r$ gilt, und falls der Meridianschnitt zwei senkrechte Symmetrieachsen besitzt, die zur Bildung von zwei Rotationskörpern mit Kapazitäten C, C' Anlaß geben, daß $C' = C'' \leq 2r$ gilt (wieder ist die Kugel ausgeschlossen). — Numerische Konsequenzen der angeführten Sätze sind: Für den Würfel der Kantenlänge a : $0,62211a \leq C' \leq 0,71055a$; für den Kreiszylinder, dessen Meridianschnitt ein Quadrat der Seitenlänge a ist: $0,57236a \leq C' \leq 0,59017a$.

Bachmann (Marburg a. d. Lahn).

Topologie:

Paintandre, R.: Sur une classe d'espaces topologiques. C. r. Acad. Sci., Paris 224, 1806—1808 (1947).

Es sei X ein akzessibler topologischer Raum (M. Fréchet, *Espaces abstraits*, Paris 1928). Verf. nennt X im Punkt x sphärisch, wenn eine Basis der Umgebungen von x (Umgebung hier gleich Menge, deren offener Kern den Punkt x enthält) existiert, die geordnet ist bezüglich der Relation \leq : ist X sphärisch in jedem Punkt x , so heißt X sphärisch. (Der Charakter von X in x ist die kleinste Mächtigkeit einer Basis der Umgebungen von x .) Verf. spricht folgende Sätze aus: 1. Ist X sphärisch in x , so ist der Durchschnitt einer Familie von Umgebungen von x , deren Mächtigkeit kleiner ist als der Charakter von X in x , ebenfalls eine Umgebung von x . 2. Ist F ein abgeschlossener Teilraum eines sphärischen Raumes X , so hat jeder Punkt von F denselben Charakter von F wie in X , oder er ist isoliert. 3. Ist X sphärisch in x , so existiert eine monoton fallende, wohlgeordnete Basis der Umgebungen von x . 4. Ein sphärischer Raum, der in jedem Punkt einen Charakter \aleph_0 hat, ist nicht kompakt. 5. Ein Raum, der das Produkt un abzählbar vieler Räume mit mehr als einem Punkt ist, ist sphärisch in keinem seiner Punkte.

— Weitere Sätze betreffen uniforme sphärische Räume. Nöbeling (Erlangen).

Paintandre, R.: Sur l'extension de la théorie des fonctions de Baire à une classe d'espaces topologiques non métriques. C. r. Acad. Sci., Paris 225, 26—28 (1947).

Verf. verallgemeinert die Theorie der Baireschen Funktionen, die bisher nur für die metrischen Räume vorliegt, auf sphärische Räume (s. vorsteh. Ref.).

Nöbeling (Erlangen).

Dowker, C. H.: An imbedding theorem for paracompact metric spaces. Duke math. J. 14, 639—645 (1947).

L'Aut. prouve d'abord que tout espace de Hilbert (séparable ou non) est paracompact, puis qu'inversement, tout espace métrique paracompact est homéomorphe à un sous-espace d'un espace de Hilbert; pour savoir si tout espace métrique est paracompact (question non résolue jusqu'ici) il suffit donc de savoir si tout espace métrique (non séparable) peut être plongé dans un espace de Hilbert non séparable.

J. Dieudonné (Nancy).

Hu, Sze-Tsen: On spherical mappings in a metric space. Ann. Math., Princeton, II. s. 48, 717—734 (1947).

Während die Elemente der n -ten Homotopiegruppe $\pi^n(Y)$ eines Raumes Y durch stetige Abbildungen einer n -dimensionalen Sphäre S^n in den Raum Y definiert werden, bei denen ein fester Punkt x_0 von S^n in einen festen Punkt y_0 von Y übergeht, betrachtet Verf. solche Abbildungen von S^n in Y , bei denen eine feste r -dimensionale Sphäre $S^r \subset S^n$ in einen festen Punkt $y_0 \in Y$ übergeführt wird. Abbildungen

die homotop ineinander deformierbar sind unter der Nebenbedingung, daß während der ganzen Deformation die Abbildung von S^r konstant bleibt, werden in dieselbe Homotopieklasse zusammengefaßt. Diese Homotopieklassen, für die sich ähnlich wie bei den Homotopiegruppen eine Addition definieren läßt, sind die Elemente der (n, r) ten Abhomotopiegruppe $\pi_r^n(Y)$. Sie werden systematisch untersucht, und es wird ihr Zusammenhang mit den Homotopiegruppen aufgedeckt. Z. B. ergibt sich neben zahlreichen anderen Beziehungen, daß für $0 < r < n$ die Gruppe $\pi_r^n(Y)$ isomorph der direkten Summe der Homotopiegruppen $\pi^n(Y)$ und $\pi^{r+1}(Y)$ ist. Als Anwendung wird der Raum der stetigen Abbildungen eines n -dimensionalen Elementes E^n in den Raum Y mit fester Abbildung der Randsphäre S^{n-1} untersucht. Die Gruppen $\pi_1^n(Y)$ wurden von M. Abe [Japan. J. Math. **16**, 169—176 (1939)] eingeführt.

H. Seifert (Heidelberg).

Borsuk, K.: On the topology of retracts. Ann. Math., Princeton, II. s. 48, 1082—1094 (1947).

Es sei A ein metrisierbarer, separabler Raum. Eine Teilmenge R von A heißt nach Verf. ein Retrakt von A , wenn eine eindeutige, stetige Abbildung f von A auf R existiert mit $f(p) = p$ für jeden Punkt p von R . Zwei Räume A und B nennt Verf. vom gleichen \mathfrak{R} -Typ, wenn A zu einem Retrakt von B und B zu einem Retrakt von A homöomorph ist. Schließlich wird ein Raum A vom Verf. \mathfrak{R} -determinierbar genannt, wenn jeder Raum B , der vom gleichen \mathfrak{R} -Typ ist wie A , homöomorph ist zu A . Der Hauptsatz der Arbeit lautet nun: Ein Polytop P ist dann und nur dann \mathfrak{R} -determinierbar, wenn für jedes $k = 2, 3, \dots$ die Menge $\tau^k(P)$ leer ist; dabei ist $\tau^k(P)$ die Menge aller Punkte p von P mit folgenden zwei Eigenschaften: 1. p hat keine Umgebung (in P), die homöomorph ist zum k -dimensionalen Euklidischen Raum; 2. p besitzt eine Umgebung, welche homöomorph ist zu einem abgeschlossenen, k -dimensionalen Euklidischen Halbraum. Ein Nebenergebnis lautet: Ein Polytop P ist homöomorph zu einer echten Teilmenge von P dann und nur dann, wenn für mindestens ein $k = 1, 2, \dots$ die Menge $\tau^k(P)$ nicht leer ist. Nöbeling (Erlangen).

Kelley, J. L. and E. Pitcher: Exact homomorphism sequences in homology theory. Ann. Math., Princeton, II. s. 48, 682—709 (1947).

Eine Folge von abelschen Gruppen G_r ($r = \dots, -1, 0, +1, \dots$) und Homomorphismen β_r von G_r auf G_{r-1} wird eine Homomorphismensequenz oder ein Kettenkomplex M (nach W. Mayer) genannt, wenn $\beta_r \beta_{r+1} = 0$ ist. Für solche Sequenzen lassen sich in bekannter Weise Homologiegruppen $H_r(M)$ einführen. Eine Sequenz heißt exakt, wenn für jedes r der Kern von β_r mit dem Bild $\beta_{r+1}(G_{r+1})$ identisch ist, wenn also die Homologiegruppe $H_r(M)$ verschwindet. Jeder Teilkomplex N von M , d. h. jedes System von Untergruppen $G_r(N)$ der Gruppen $G_r(M)$, gibt Anlaß zu den beiden Homomorphismensequenzen $G_r(N)$ und der Faktorsequenz $G_r(M)/G_r(N)$. Die letzte Sequenz führt auf die Homologiegruppen mod. N , also die relativen Homologiegruppen $H_r(M/N)$ oder $H_r(M)/H_r(N)$. $H_r(M)$ wird in natürlicher Weise homomorph abgebildet auf $H_r(M/N)$, $H_r(M/N)$ wird durch β_r homomorph abgebildet auf $H_{r-1}(N)$, $H_{r-1}(N)$ wieder in natürlicher Weise auf $H_{r-1}(M)$. Fügt man diese drei Homomorphismen für die verschiedenen Werte von r aneinander, so erhält man das der Arbeit zugrundeliegende Haupttheorem: Diese Homomorphismensequenz ist exakt. — Sequenzen dieser Art wurden bereits vielfach betrachtet, so z. B. von Hurewicz [On duality theorems, Bull. Amer. math. Soc. **47**, 562 (1941)], Alexandroff-Hopf [Topologie, Berlin 1935, S. 279f.], Eilenberg-Steenroß [Axiomatic approach to homology theory, Proc. nat. Acad. Sci. USA **31**, 117 (1945)]. Verff. untersuchen sie systematisch und zeigen dabei besonders die Rolle des genannten Haupttheorems in den verschiedenen Anwendungen. Sie behandeln unter diesem Gesichtspunkt Homologie- und Kohomologietheorie abstrakter Komplexe, Dualitätssätze in Mannigfaltigkeiten, Čechsche Homologietheorie. Eine Anwendung auf Überdeckungen eines Komplexes mit endlich vielen

Teilkomplexen ergibt eine Verallgemeinerung der Mayer-Vietoris'schen Formel, in der die Homologiegruppen der beteiligten Komplexe und ihrer verschiedenen Durchschnitte auftreten. Eine weitere Anwendung ergibt Analoga der Morseschen Formeln für die kritischen Werte einer im Raum M definierten beschränkten Funktion.

Franz (Frankfurt a. M.).

Tutte, W. T.: A family of cubical graphs. Proc. Cambridge philos. Soc. 43. 459—474 (1947).

Ein m -Kreis ist ein einfaches geschlossenes Polygon aus m verschiedenen Ecken und m verschiedenen Kanten. Ein Graph G heißt vom Umfang (girth) m , wenn m die kleinste Zahl ist, derart, daß G einen m -Kreis enthält. Ein s -Bogen ist ein von einem Anfangs- zu einem Endpunkt führender Weg in G , der genau aus s , voneinander verschiedenen, Kanten besteht. G heißt s -regulär, wenn G zusammenhängend ist und je zwei s -Bogen von G durch einen Automorphismus von G in einander übergeführt werden können. — Es wird gezeigt, daß ein regulärer Graph vom Grad 3 nur für $s = 1, 2, 3, 4, 5$ s -regulär sein kann. Ferner: Ein regulärer Graph vom Grad 3 und vom Umfang m kann nur für $s = \frac{1}{2}m + 1$ oder $\frac{1}{2}(m - 1)$, je nachdem m gerade oder ungerade ist, s -regulär sein. Gilt in diesen Ungleichungen das Gleichheitszeichen, so heißt der Graph G ein Käfig (cage). Als Hauptresultat ergibt sich: Es gibt nur 6 nichthomöomorphe Käfige, nämlich je einen für die Werte $s = 2, 3, 4, 5, 6$ und 8. Es sind die folgenden Graphen. $s = 2$: Zwei Ecken, die durch drei Kanten verbunden sind. $s = 3$: Der Ecken- und Kantenkomplex eines Tetraeders. $s = 4$: Der bekannte, im Vierfarbenproblem eine Rolle spielende Graph mit den 6 Ecken A_i und B_k ($i, k = 1, 2, 3$) und den 9 Kanten $A_i B_k$ (D. König, Die Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936, S. 197, Fig. 92a, b). $s = 5$: Der Petersensche Graph, dessen Kanten durch Identifizieren gegenüberliegender Ecken und Kanten des regulären Dodekaeders entstehen (ebendort, S. 194, Fig. 90). $s = 6$: Ein anläßlich des Farbenproblems auf dem Torus mehrfach betrachteter Graph mit 21 Kanten (siehe W. W. Rouse Ball, Mathematical recreations, New York 1939, S. 235). $s = 8$: Ein neuer, wie folgt, konstruierbarer Graph aus 45 Kanten. Man verbinde bei einem Würfel in jedem der drei Quadrupel paralleler Kanten die Mittelpunkte jedes Paares von Gegenkanten durch eine neue Kante, verbinde dann die Mittelpunkte der beiden neuen Kanten durch eine weitere Kante und verbinde endlich deren Mittelpunkt mit einem festen außerhalb der bisherigen Konstruktion gelegene Punkt P .

Franz (Frankfurt a. M.).

Klassische Theoretische Physik.

Mechanik:

Nikitin, A. K.: Über einige Eigenschaften der Trajektorien eines konservativen Systems. Priklad. Mat. Mech., Moskva 12, 23—28 (1948) [Russisch].

Le but de ce travail est l'étude des singularités des trajectoires d'un système dynamique conservatif au point de vue de la méthode d'Hamilton-Jacobi. Il est bien connu que pour un tel système l'équation d'Hamilton-Jacobi est

$$(I) \quad H(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n) = h,$$

où par p_i il faut entendre la dérivée partielle $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ par rapport à q_i de la fonction inconnue $V(q_1, \dots, q_n)$. Les caractéristiques de l'équation (I) sont définies par le système d'équations différentielles ordinaires:

$$(I) \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{t} = \frac{d}{dt};$$

$$(II) \quad \dot{V} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} p_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

dont le système partiel (I) est celui des équations canoniques. — En se proposant l'analyse des singularités des trajectoires, on est conduit aux groupes suivants de

conditions

$$1) \frac{\partial H}{\partial p_i} \neq 0, \frac{\partial H}{\partial q_i} \neq 0 \quad 2) \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0, \frac{\partial H}{\partial q_i} \neq 0 \quad 3) \frac{\partial H}{\partial p_i} \neq 0, \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \quad 4) \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0, \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$$

pour toutes les valeurs de l'indice i de 1 à n , parce qu'il est possible de réduire tout autre cas aux précédents moyennant une transformation linéaire de contact des variables canoniques p, q . — Un point où les conditions 1) et 3) sont satisfaites est régulier. Si l'on porte son attention au cas 2) on trouve le système $H = h, \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0$

($i = 1, \dots, n$) et, par élimination des p_i , une équation de la forme $R(q_1, \dots, q_n) = 0$ qui représente dans l'espace des configurations une surface (que l'auteur appelle discriminante), lieu des points de rebroussement des trajectoires (au moins dans le cas où les dérivées secondes de H n's'annulent pas simultanément). — Dans le cas 4), si les conditions sont compatibles on a, en général, soit des configurations d'équilibre soit des mouvements stationnaires au sens de Routh et Levi-Civita.

On doit considérer aussi le cas où le déterminant jacobien des dérivées $\frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{\partial H}{\partial q_i}$ s'annule

identiquement. Alors les variables canoniques doivent satisfaire à un certain nombre de liaisons et l'on trouve une équation qui pour chaque valeur de la constante de l'énergie h représente le lieu des points singuliers des trajectoires d'une famille de mouvements isoénergétiques. L'auteur remarque que la surface discriminante est une partie de la surface d'action maupertuisienne nulle. Les trajectoires sont orthogonales à cette surface. Dans les cas où le système dynamique admet des variables cycliques, les trajectoires sont tangentes à la surface discriminante. L'auteur applique ces remarques générales au mouvement d'un point dans la champ de la gravité.

G. Lampariello (Messine).

Sinding, Erik: On the systematic changes of the eccentricities of nearly parabolic orbits. Danske Vid. Selsk., mat.-fysiske Medd. 24, Nr. 16, 8 S. (1948). Auch erschienen in Publ. Hinds Medd. Københavns Observ. 146, 8 S. (1948).

Um über die ursprüngliche Bahn eines Kometen etwas aussagen zu können, muß man mit Hilfe einer genaueren Störungsrechnung die Bewegung des Kometen über hinreichend viele Jahre zurückverfolgen. Dabei interessieren naturgemäß solche Kometen, für deren oskulierende Bahn die Exzentrizität e sehr nahe bei 1 liegt bzw., was damit gleichwertig ist, die reziproke große Bahnachse $1/a$ sehr klein ist. Für 21 Kometen liegen derartige Rechnungen mit Berücksichtigung der Störungen durch Jupiter und Saturn vor. Verf. bildet $\Delta(1/a) =$ ursprüngliches, oskulierendes $1/a$, und aus der statistischen Verarbeitung des so gegebenen Zahlenmaterials den Mittelwert $\Delta(1/a)_m$; beigegeben ist die Verteilungskurve der Einzelwerte von $1/a$. Es ergibt sich $\Delta(1/a)_m = +0,000552 \pm 0,000055$. Im zweiten Teil der Arbeit zeigt Verf., daß sich dies Ergebnis bereits erhalten läßt aus der Betrachtung eines vereinfachten Dreikörpermodells, das aus Sonne, Jupiter und Komet mit einer Kreisbahn des Jupiter um die Sonne besteht. Er geht aus von dem für diesen Fall von H. v. Seeliger angegebenen Jacobischen Integral der Bewegungsgleichungen und leitet durch einfache Umformungen aus ihm ab ($r =$ Entfernung Komet — Jupiter; $r' =$ Entfernung Komet — Sonne, $q =$ Entfernung Jupiter — Sonne; $\mu =$ Jupitermasse) $\Delta(1/a)_m = 2\mu/q - \mu(r^2 - q^2)/r^3$. Mit $r = 1$, $r' = 5,203$, $\mu = 1/1047$ gibt dies $\Delta(1/a)_m = 0,000544$.

R. Seeliger (Greifswald).

●**Huncan, W. J.:** Mechanical admittances and their applications to oscillation problems. (Ministry of Supply: Aeronautical Research Council, Reports and Memoranda, Nr. 2000). London: H. M. Stationery Office, 1947. 128 p. 22 s. 6d. net.

Hydrodynamik:

Kampé de Fériet, J.: Harmonic analysis of the two-dimensional flow of an incompressible viscous fluid. Quart. appl. Math. 6, 1—13 (1948).

Untersucht wird die zweidimensionale Strömung einer zähen inkompressiblen Flüssigkeit in einem endlichen oder die ganze Ebene umfassenden Gebiet, an dessen Berandung die Geschwindigkeit zu Null wird. Das Strömungsbild läßt sich dann aus einer Stromfunktion ableiten, deren Laplace-Ableitung mit dem Faktor $-1/2$ die Drehgeschwindigkeit ξ der Strömung ergibt. Wenn man nun bei festem t das (x, y) -Feld dieser Wirbelverteilung durch ein Fourierdoppelintegral darstellt, so zeigen sich einfache rationale Zusammenhänge zwischen der Spektralfunktion $W(m, n)$ der Drehung und denen $U(m, n)$, $V(m, n)$, $\Psi(m, n)$, $K(m, n)$ der Geschwindigkeitskomponenten, der Stromfunktion und der kinetischen Energie $(u^2 + v^2)/2$, nämlich:

$$U(m, n) = W(m, n) \cdot 2in/(m^2 + n^2), \quad V(m, n) = W(m, n) \cdot (-2im)/(m^2 + n^2), \\ \Psi(m, n) = W(m, n) \cdot 2/(m^2 + n^2), \quad K(m, n) = W(m, n)^2 \cdot 8\pi^2/(m^2 + n^2).$$

Aus der Navier-Stokesschen Differentialgleichung ergibt sich für $W(m, n)$ die Integro-Differentialgleichung

$$0 = \frac{\partial W}{\partial t} + 2 \int \frac{m n - m \bar{n}}{m^2 + \bar{n}^2} W(m, n, t) W(m - m, n - n, t) dm d\bar{n} + \nu(m^2 + n^2) W(m, n, t) \Phi$$

mit

$$\Phi(m, n, t) = \frac{1}{4\pi^2} \oint \left[\xi \frac{\partial}{\partial n} + im \frac{\partial}{\partial n} + in \frac{\partial}{\partial m} \right] \exp(-imx - iny) ds.$$

Handelt es sich beim Grundgebiet um die ganze Ebene, so verschwindet hier das Randintegral, und ist ξ entlang den Stromlinien konstant, so wird auch links das Integral zu Null, so daß $W(m, n, t)$ mit t exponentiell abfällt. *Hiebbrandt*

Cârstoiu, I.: De la circulation dans un fluide visqueux incompressible. C. r. Acad. Sci., Paris **224**, 534—535 (1947).

Es wird darauf hingewiesen, daß die Existenz eines eindeutigen Potentials für die Beschleunigung der Strömung einer inkompressiblen, zähen Flüssigkeit die zeitliche Konstanz der Zirkulation nach sich zieht. Die genannte Voraussetzung trifft für stationäre (permanent) langsame Bewegungen solcher Flüssigkeiten zu, so daß die Mechanik der vollkommenen Flüssigkeiten in diesem Fall anwendbar bleibt. *Grell (Erlangen).*

Cabannes, H.: Étude de l'écoulement permanent d'un fluide visqueux incompressible. C. r. Acad. Sci., Paris **224**, 711—713 (1947).

Es handelt sich um den Beweis des folgenden, mit dem Stokesschen bzw. Whiteheadschen Paradoxon ähnlichen Satzes: Im dreidimensionalen Raum gibt es keine Lösung der Navier-Stokesschen Gleichungen, die eine permanente gleichförmige Umströmung eines festen Hindernisses darstellt und ein im Unendlichen reguläres Geschwindigkeitsfeld besitzt, d. h. für die der Geschwindigkeitsvektor

$v(q, \theta, q)$ eine gleichmäßig konvergente Entwicklung $v(q, \theta, q) = v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(\theta, q)}{q^n}$

zuläßt, wobei die Vektorfunktionen $a_n(\theta, q)$ partielle Ableitungen 3. Ordnung besitzen. Ein entsprechendes Resultat gilt auch für den Fall einer reinen Drehströmung. *Grell (Erlangen).*

Moreau, J.: Sur l'allure à l'infini d'un écoulement permanent lent. C. r. Acad. Sci., Paris **224**, 1469—1472 (1947).

Beim Studium der dreidimensionalen, permanenten, langsamen, dem Gleichungssystem $\mu \Delta v = \text{grad } p = 0$, $\text{div } v = 0$ unterworfenen Bewegungen einer inkompressiblen, zähen Flüssigkeit wird der Ruhezustand im Unendlichen immer durch die folgenden Bedingungen festgelegt: 1. Der Geschwindigkeitsvektor $v = (v_1, v_2, v_3)$ hat im Unendlichen mindestens die Ordnung von $1/R$; 2. Der Druck p strebt im Unendlichen gegen eine Konstante p_0 derart, daß $p - p_0$ mindestens die Ordnung von $1/R^2$ besitzt. Verf. zeigt, daß diese beiden Annahmen aus der Voraussetzung gefolgert werden können, daß die Geschwindigkeit im Unendlichen gleichmäßig

gegen Null strebt. Ebenso werden die partiellen Ableitungen $\partial v_i / \partial x_k$ dann mindestens von der Ordnung $1/R^2$. Es genügt sogar die Voraussetzung, daß v im sphärischen Mittel gegen Null strebt, d. h. daß die über die Oberflächen der Kugeln vom Radius R mit festem Mittelpunkt erstreckten Integrale $\frac{1}{4\pi R^2} \iint v \, d\sigma$ mit $R \rightarrow \infty$ gegen Null streben.

Grell (Erlangen).

Carrier, G. F. and C. C. Lin: On the nature of the boundary layer near the leading edge of a flat plate. Quart. appl. Math. 6, 63—68 (1948).

Hier wird eine seit Jahrzehnten unerledigt gebliebene, insbesondere von L. Prandtl den Mathematikern immer wieder vorgeschlagene Aufgabe der Hydrodynamik in Angriff genommen, aber noch keineswegs umfassend gelöst. Jeder der beiden Verff. bietet dabei einen eigenen, unabhängig gefundenen Ansatz von etwa gleicher Tragweite für das Problem. — Man kennt exakte und damit für alle Re -Zahlen gültige Lösungen der allgemeinen Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit für eine Reihe von Einzelfällen. Sie zeichnen sich alle dadurch aus, daß die zugehörigen Bewegungsgleichungen sich gehörig vereinfachen, indem entweder die nichtlinearen Trägheitsglieder für sich verschwinden und also nur noch ein lineares Differentialgleichungsproblem zu lösen bleibt oder aber bei geeigneter Koordinatenwahl die Zurückführung auf gewöhnliche Differentialgleichungen möglich wird. Auf der Suche nach einer Lösung der vollständigen Navier-Stokesschen Gleichungen, die sich nicht durch solche mathematischen Vorteile darbietet, kann man hoffen, daß insbesondere das Problem der längs angeströmten ebenen Platte ein noch relativ einfaches Beispiel von zugleich praktischem Interesse abgeben wird. — Weitab von der Platte herrscht praktisch reine Potentialströmung (Gebiet I). Hinreichend weit stromabwärts von der Plattenvorderkante und damit für sehr große Re -Zahlen (zu bilden mit der überströmten Plattenlänge) besitzt man die asymptotische Lösung durch die Grenzschichttheorie, die bekannte Blasiusche Plattengrenzschicht (Gebiet II). Unbekannt ist der Strömungsverlauf in unmittelbarer Umgebung der Plattenvorderkante, wo wegen der kleinen Re -Zahlen schleichende Strömung approximativ anzunehmen ist (Gebiet III), und eine besondere Schwierigkeit stellt dann die Ermittlung der Lösung im Übergangs- bzw. Überdeckungsbereich (Gebiet IV) der genannten drei Approximationen dar. — Die Verff. beschränken sich auf eine erste Behandlung der Umgebung III der Plattenvorderkante und des überlappenden Anschlusses an die Blasiusche Grenzschicht in II. In III erhalten sie eine Näherungslösung, indem sie von einem geeigneten partikulären Integral der biharmonischen Differentialgleichung für die Stromfunktion der schleichenden Strömung als Ausgangsnäherung für einen Iterationsprozeß ausgehen. Über die Konvergenz des Verfahrens wird nichts ausgesagt. Zunächst schwerwiegender ist der Mangel, daß auch nach vollzogenem Anschluß an die Blasiusche Grenzschicht Eindeutigkeit der Lösung in III nicht erzielt werden kann. Verff. übersehen dabei auch, daß der Anfangspunkt der Blasiuschen Lösung nicht unbedingt in der Plattenvorderkante, dem Ursprung für die Lösung in III, zu liegen braucht, so daß hier eine freibleibende Translation in Richtung parallel zur Platte die Mehrdeutigkeit noch erhöht. Als wesentliches Ergebnis der Untersuchung ist hervorzuheben, daß der Anschluß zwischen den Lösungen in II und III überhaupt in erster Näherung möglich wird. Das gelingt durch die Wahl der Ausgangsnäherung für die Iteration in III in dem Sinne, daß in allernächster Nähe der Platte das am stärksten ins Gewicht fallende Glied der entwickelten Lösung für III mit jenem für II zur Übereinstimmung gebracht werden kann. Während bei der ersten Behandlungsweise Polarkoordinaten um die Plattenvorderkante als Ursprung benutzt werden, verwendet die zweite Darstellung parabolische Koordinaten mit der Platte als Achse sowohl in III als auch in II (modifizierte Approximation der Grenzschichtströmung), wodurch die Überdeckung der

Approximationsgebiete III und II vollständiger ins Blickfeld rückt. Die angegebenen Gültigkeitsbereiche sind nicht überall überzeugend. Zum Übergangsbereich IV werden nur einige Vermutungen geäußert. *H. Görtler* (Freiburg i. Br.).

Vignier, G.: Les équations de la couche limite dans le cas de gradients de vitesse élevés. *C. r. Acad. Sci., Paris* **224**, 713—714 (1947).

Bei großem Geschwindigkeitsgradienten gilt die den Gleichungen der homogenen isotropen Flüssigkeiten zugrunde liegende Annahme einer linearen Beziehung zwischen Spannung und Deformationsgeschwindigkeit nicht mehr. Berücksichtigt man zur besseren Erfassung der Vorgänge noch Glieder dritter Ordnung in den Zähigkeitskräften, so ergibt sich eine erweiterte Form der Navier-Stokeschen Differentialgleichungen. Die Überlegungen werden auf die Behandlung eines bei Harry Schmidt und K. Schröder [Laminare Grenzschichten, Luftfahrtforschung **19**, 65—97 (1942), S. 80; dies. Zbl. **27**, 172] wiedergegebenen Prandtlschen Beispiels einer zähen inkompressiblen Strömung angewandt, indem die der dortigen Gleichung (106) entsprechende erweiterte Grenzschichtgleichung aufgestellt wird. *Grell*.

Viguier, Gabriel: La fonction de dissipation en écoulement turbulent isotrope. *C. r. Acad. Sci., Paris* **225**, 1277—1278 (1947).

Für die Strömung einer inkompressiblen zähen Flüssigkeit wird die Rayleighsche Dissipationsfunktion für den bei großem Geschwindigkeitsgradienten eintretenden Fall aufgestellt, daß die Beziehung zwischen Dehnungsgeschwindigkeiten und Zähigkeitsspannungen nicht mehr linear ist; gegenüber dieser einfacheren, dem Hookeschen Gesetz analogen Annahme treten jetzt Zusatzglieder 3. Ordnung auf. Unter der Voraussetzung isotroper Turbulenz wird die mittlere Dissipation angegeben; dabei ergibt sich eine Verallgemeinerung einer von G. I. Taylor aufgestellten Beziehung [vgl. K. Wieghardt, Luftfahrtforschung **18**, 1—7 (1941); dies. Zbl. **24**, 371]. *Grell* (Erlangen).

Guderley, G.: Störungen in ebenen und rotationssymmetrischen Schall- und Überschallparallelstrahlen. *Z. angew. Math. Mech.* **25** **27**, 190—195 (1947).

Für den ebenen und rotationssymmetrischen Parallelstrahl mit Überschall- bzw. Schallgeschwindigkeit wird die Fortpflanzung von Unstetigkeiten untersucht, die bekanntlich längs einer Machschen Welle erfolgt. Bei Zugrundelegung eines kartesischen ξ, η -Koordinatensystems, dessen η -Achse mit einer Machschen Welle des Parallelstrahls zusammenfällt, wird für das Geschwindigkeitspotential ein Potenzreihenansatz in ξ gemacht mit Koeffizientenfunktionen von η für die Intensität der Störung. Berücksichtigt wird in der Rechnung nur das erste Entwicklungsglied. Die Intensität berechnet sich aus der Strömungsdifferentialgleichung; außerdem findet man die Mindestgröße für den zunächst unbestimmt gebliebenen Potenzexponenten des Ansatzes. Von besonderem Interesse ist das Verhalten der Unstetigkeit in der Umgebung der Achse bei rotationssymmetrischen Strömungen. Dabei läßt sich aus dem Intensitätsverlauf das Anwachsen von Verdichtungsstellen zu Verdichtungsstößen verfolgen. Bei Überschallgeschwindigkeit bleibt die zweite Ableitung der Intensitätsfunktion als Faktor einer kleinen Größe unberücksichtigt, so daß man es mit einer Differentialgleichung erster Ordnung zu tun hat, während der Grenzfall der Schallgeschwindigkeit eine Differentialgleichung zweiter Ordnung liefert. Die beiden hier auftretenden Lösungstypen entsprechen dem Übergang nach Überschall- bzw. Unterschallgeschwindigkeit. Die Umkehrung des letzten Falles bedeutet die Entstehung eines Parallelstrahls mit Schallgeschwindigkeit aus einer Unterschallströmung. Völlig offen bleibt freilich bei der ganzen Untersuchung, inwieweit die Rechnungen über die Entwicklungsstelle des Ansatzes hinaus Gültigkeit haben. *M. Schäfer* (Göttingen).

Burgers, J. M.: Cases of motion in a gas with non colliding molecules. *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* **50**, 573—583 (1947).

Mit „Superaerodynamik“ bezeichnen einige Verff. die Untersuchung der Bewegungsvorgänge in stark verdünnten Gasen, in denen die mittlere freie Weglänge der Moleküle groß ist im Vergleich zu den Abständen der das Gas einschließenden Wände, so daß praktisch keine Zusammenstöße der Moleküle untereinander erfolgen, vielmehr die Geschwindigkeitsverteilung eine reine Folge der Reflexion der Moleküle an den Begrenzungswänden wird. Immerhin kann im Falle diffuser Reflexion an den Wänden noch approximativ die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung erwartet werden, trotz anderer Abweichungen vom normalen Gas; Verf. stellt sich die Aufgabe nachzuweisen, daß selbst bei diffuser Reflexion erhebliche Abweichungen von der Maxwell-Verteilung auftreten können, wenn die Wände veränderliche Geschwindigkeiten von der Größenordnung der Molekülgeschwindigkeiten haben. Er betrachtet der Einfachheit halber ein Gas in der Nachbarschaft einer einzigen Wand, die sich senkrecht zu ihrer eigenen Ebene bewegt, wobei der Zustand des Gases nur vom Wandabstand und von der Zeit abhängen soll. Zusammenstöße der Moleküle untereinander werden außer Betracht gelassen. Die Reflexion an der Wand erfolge ohne Verlust an kinetischer Energie (Beobachter fest mit Wand verbunden). Besonders einfach stellen sich die zu demonstrierenden Abweichungen im Falle einer Wand mit irgendwie abnehmender Geschwindigkeit und zunächst ruhenden Molekülen dar. Schon der Fall zweier paralleler, symmetrisch bewegter Wände ist erheblich schwerer zugänglich.

H. Görtler (Freiburg i. Br.).

Burgers, J. M.: On the influence of gravity upon the expansion of a gas. I. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 51, 145—154 (1948).

Ein ideales, der Schwerkraft unterworfenen Gas, nach unten unbegrenzt, nach oben durch eine horizontale ebene Wand abgegrenzt, befinde sich im Zustand der Ruhe bis zum Zeitpunkt $t = 0$, in dem die obere Begrenzungswand plötzlich beseitigt und damit eine rein vertikale Expansionsbewegung ausgelöst wird. Verf. untersucht den so entstanden gedachten Bewegungsvorgang. Er geht dabei aus von den Bewegungsgleichungen in einer früher von ihm angegebenen Form [Proc. Akad. Wet. Amsterdam 49, 593 (1946)]. Nach der Methode von Riemann läßt sich der Fall $k = c_0/c_v = 5/3$ (spezifische Wärme konstant angenommen) vollständig integrieren. Ort und Zeit der Bewegung eines Volumelements drücken sich durch rationale Funktionen der Bewegungsgeschwindigkeit des Elements und der Schallgeschwindigkeit in diesem Element aus. Verf. weist nach, daß zur Zeit $t = 3\sqrt{2}c_0/g$ (c_0 Schallgeschwindigkeit [$t \leq 0$] unmittelbar unter der oberen Begrenzungsebene, g im ganzen Raum konstante Erdbeschleunigung) ein Verdichtungsstoß auftritt. Die Gültigkeit der Lösung kann daher für spätere Zeiten nicht überall aufrecht erhalten werden, und die weitere Verfolgung der Bewegung wird sehr erschwert. Immerhin lassen sich für das erste Stadium der Ausbreitung des Verdichtungsstoßes, in dem die Entropiezunahme noch gering ist, Aussagen gewinnen. Die Untersuchung soll fortgesetzt werden.

H. Görtler (Freiburg i. Br.).

Atomphysik.

Quantenmechanik:

● Millikan, Robert Andrews: Electrons (+ and -), protons, photons, neutrons, mesotrons, and cosmic rays. Rev. ed. Chicago, University of Chicago Press 1947. X, 642 p., 124 fig. \$ 6.00.

● Richtmyer, F. F. and E. H. Kennard: Introduction to modern physics. 4. ed. New York and London: McGraw-Hill Book Co., Inc. 1947. XVII, 759 p. (International Series in Pure and Applied Physics.).

● Morand, Max: Introduction mathématique aux théories physiques modernes. I.: Nombres complexes, nombres hypercomplexes, matrices, opérateurs, applications élémentaires. Paris, Librairie Vuibert 1947. 140 p. 350 fr.

Elementar gehaltene Einführung in die Gebiete der Mathematik, die für die Quantenmechanik von Bedeutung sind. *Möglich* (Berlin).

Soonawala, M. P.: Quantum numbers, atomic mass numbers and atomic forces. *Indian J. Physics* **21**, 138—142 (1947).

Beim Zweikörperproblem werden die Drehimpulse jedes einzelnen Teilchens in bezug auf den Schwerpunkt für sich gequantelt. Aus den Ergebnissen werden Folgerungen für Wasserstoffatom und Deuteron gezogen. *J. Meixner* (Aachen).

Chang, T. S.: A note on the Hamiltonian theory of quantization. II. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **43**, 196—204 (1947).

Es werden Hamiltonfunktionen für einige spezielle Fälle entwickelt, für die die gewöhnlichen Methoden versagen, nämlich für Lagrangefunktionen mit Nebenbedingungen, für solche mit fehlenden Momenten und im Falle der Eichinvarianz. *Bopp*.

Godnev, I. und V. Sorokin: Über die Klassifikation der Funktionen eines Systems von gleichartigen Teilchen nach dem Symmetriecharakter und dem Impulsmoment. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, II. s. 58, 1931—1933 (1947) [Russisch].

Die Klassifikation der möglichen Zustände eines Systems gleicher Teilchen mit gleichem Drehimpuls in bezug auf die Permutationsgruppe entweder der Bahn- oder der Spinkoordinaten allein läßt sich leicht angeben. Verff. diskutieren in enger Anlehnung an Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik, § 54, 1928, einen etwas allgemeineren Fall. *Gora* (München).

Blatt, John M.: On the Heitler-theory of radiation damping. *Physic. Rev.*, Minneapolis, II s. 72, 466—477 (1947)

In Ziff. 1—3 gibt Verf. eine kritische zusammenfassende Darstellung der Gora-Heitlerschen Methode zur Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung. Die wesentlichen Punkte sind diese. 1. Die GH-Methode ist keine Störungsrechnung. Darauf beruht ihre Überlegenheit. 2. Bei der Berechnung der Strahlungsrückwirkung wird nur das Diracsche Strahlungsfeld berücksichtigt. Das induktive Trägheitsfeld wird grundsätzlich vernachlässigt. — In Ziff. 4 werden drei einfache, konstruierte Beispiele behandelt, die sich streng ausrechnen lassen. Die exakten Lösungen werden mit denen der GH-Theorie und der Störungsrechnung verglichen. Bei endlich ausgedehnten Quellen gibt es keinen erheblichen Unterschied zwischen der Störungsrechnung und GH-Methode. Bei der Streuung skalarer Mesonen an einem Oszillator ergibt die GH-Methode für die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes von der Energie der einfallenden Mesonen ein der strengen Lösung sehr ähnliches Ergebnis, jedoch ohne Verschiebung der Resonanzstelle. Bei der Streuung von Vektor-Mesonen ist der Einfluß der Strahlungsdämpfung extrem stark. Auch hier ist die GH-Näherung nicht gut. — Verf. kommt so zu dem Schluß, daß die GH-Methode in vielen Fällen gute Ergebnisse liefern mag, daß sie aber nicht nur, wie Bethe und Oppenheimer gezeigt haben, bei langen Wellen versagt, sondern, daß sie auch schon bei kurzen Wellen schlecht sein kann. — Es wird nicht erörtert, doch scheint das Versagen nicht an zufälligen Einzelheiten der Rechnung zu liegen, sondern an der grundsätzlichen Vernachlässigung der induktiven Strahlungsrückwirkung. Es scheint darum dem Ref., daß eine Kombination der GH-Methode mit der Feldmechanik weiterführen muß, da letztere gerade und nur die induktive Strahlungsrückwirkung behandelt. *Bopp* (Hechingen).

Dirac, P. A. M.: On the theory of point electrons. *Philos. Mag.*, J. Sci., London, VII. s. 39, 31—34 (1948).

Erwiderung Diracs auf eine Kritik von T. Lewis, hauptsächlich betreffend die Behandlung der Eigenzeit (s) in verschiedenen Arbeiten Diracs. Lewis wendet ein, wenn A^μ ein retardiertes oder avanciertes Potential sei, dürfe man nicht einfach $dA^\mu(z)/ds = [\partial A^\mu/\partial x_\nu]_z \cdot v_\nu$ setzen, weil A^μ explizit von der Eigenzeit abhängt (z = Koordinaten, v = Geschwindigkeit). Dirac setzt auseinander, seine A^μ hängen nur von der gesamten Weltlinie ab (im Sinne einer Berücksichtigung der Freiheits-

grade, die das System durch die Anwesenheit eines Feldes hat), nicht von einem bestimmten Punkte s' darauf (im Sinne einer unabhängigen Variablen in der Hamiltonschen Formulierung), daher $dA^\mu/ds' = 0$. Wessel (Dayton/Ohio).

Ivanenko, D. und A. Sokolov: Über metastabile Verbindungen von Elementarteilchen. Doklady Akad. Nauk SSSR, II, s. 58, 1329—1332 (1947) [Russisch].

Die Bildungswahrscheinlichkeit metastabiler Verbindungen von Elementarteilchen wird berechnet, aber dabei nur elektromagnetische Wechselwirkung in Betracht gezogen. Für das Positronium, die Verbindung eines Elektrons und eines Positrons, ergibt sich für Teilchengeschwindigkeiten von der Größenordnung der Elektronengeschwindigkeit im Grundzustand des Wasserstoffatoms eine Entstehungswahrscheinlichkeit, die ungefähr ebenso groß ist wie die Zerstrahlungswahrscheinlichkeit, während bei größeren Teilchengeschwindigkeiten die letztere überwiegt. Die Zerfallszeit des ruhenden Para-Positroniums (antiparallele Spinrichtungen) beträgt etwa $5 \cdot 10^{-10}$ sec, was der Lebensdauer des Positrons in schweren Elementen entspricht. Für das Ortho-Positronium (parallele Spinrichtungen) ergibt sich eine etwa 100mal größere Zerfallszeit. Eine analoge Verbindung von Mesotron und Elektron, das Mesotronium, hat unter den gleichen Voraussetzungen eine Lebensdauer, die etwas größer ist als die des freien Mesotrons. Schließlich wird darauf hingewiesen, daß die Bildung von Mesotronium oder auch von „Meso-Wasserstoff“ eine merkliche Herabsetzung der Absorptionswahrscheinlichkeit langsamer Mesotrone durch Atomkerne zur Folge haben könnte. Gora (München).

Majumdar, R. C. and S. Gupta: The meson field and the equation of motion of a spinning particle. Nature, London 161, 410—411 (1948).

Die Wechselwirkung des Mesonfeldes mit einem Spinteilchen wird untersucht. Sie wird nach einer Methode von Riess berechnet. Diese besteht — soweit Ref. die ihm nicht zugängliche Arbeit nach der vorliegenden Notiz beurteilen kann — in einer Modifikation der Feldgleichungen in der Umgebung der Singularität von solcher Art, daß man nachher den Grenzübergang zu einer auf die Singularität sich zusammenziehenden Modifikation machen kann. Verff. erhalten im wesentlichen die Gleichungen von Bhabha und Corben [Proc. R. Soc. London A 178, 273—314 (1941); dies. Zbl. 26, 382] mit einer schon von Harish-Chandra [Proc. R. Soc. London A 185, 269 (1946)] angegebenen Änderung. Während bei Bhabha und Corben noch willkürliche Koeffizienten auftreten, haben diese im vorliegenden Fall bestimmte Zahlenwerte. Das liegt nach Ansicht des Ref. daran, daß durch die Art des Grenzüberganges ein ganz bestimmtes Modell bevorzugt wird. Ob die Zusammenziehung auf das Zentrum der Wirklichkeit entspricht und ob man den Grenzübergang gerade in der von den Verff. angegebenen Weise durchführen muß, scheint dem Ref. nicht a priori gewiß. Bopp (Hechingen).

Ismailov, S. V.: Über das Massenspektrum der Mesonen. Doklady Akad. Nauk SSSR, II, s. 58, 1019—1022 (1947) [Russisch].

Verschiedene Massenwerte des Mesons werden mit angeregten Zuständen eines oder mehrerer Grundtypen von Mesonen in Zusammenhang gebracht. Dabei wird einfach angenommen, daß die Anregung auf einer inneren Rotation beruht. Die Wellengleichung für solche Teilchen wird linearisiert und untersucht, unter welchen Bedingungen für das Massenspektrum die einfache Formel $m_0(2k + 1)$ gilt, wo m_0 die Masse des Teilchens im nicht angeregten Normalzustand und k die Rotationsquantenzahl ist. Die Tatsache, daß man trotz der verschiedenen Massenwerte nur eine Zerfallszeit beobachtet, wird dadurch erklärt, daß angeregte Mesonen nicht zerfallen sollen; sie müssen ihre Anregungsenergie erst durch Stöße verlieren. Schließlich folgt aus der Existenz angeregter Mesonenzustände ein stärkerer Abfall des Kernfeldes nach außen hin. Gora (München).

Ivanenko, D. und A. Sokolov: Neue Folgerungen aus der Quantentheorie der Schwerkraft. Doklady Akad. Nauk SSSR, II, s. 58, 1633—1636 (1947) [Russisch].

Es wird die Entstehung und Zerstrahlung von Elementarteilchen im Gravitationsfeld untersucht. Zu diesem Zweck wird zunächst das Gravitationsfeld quantisiert. Die Quanten des Gravitationsfeldes sollen den Spin 2 haben, und daher nur die „Gravitonen“ durch Quadrupolwechselwirkung mit den Elementarteilchen gekoppelt sein. Für die Erzeugung und Zerstrahlung von Elektronenpaaren aus und in „Gravitonen“ ergeben sich Wirkungsquerschnitte, die sich von denen für die entsprechenden Prozesse mit Lichtquanten nur dadurch unterscheiden, daß der Gravitationsradius 10^{-55} cm an Stelle des gewöhnlichen Elektronenradius tritt und ein nicht sehr wesentlicher Faktor hinzukommt, der mit der Quadrupolwechselwirkung zusammenhängt. Unter normalen Verhältnissen spielen die betrachteten Prozesse praktisch keine Rolle. Für die Kosmologie kann jedoch die Entstehung von Elementarteilchen aus dem Gravitationsfeld und umgekehrt von fundamentaler Bedeutung sein. *Gora (München).*

Watson, A. G. D.: On the geometry of the wave equation. Proc. Cambridge philos. Soc. 43, 491—505 (1947).

Schon Klein und Sommerfeld haben in der Theorie des Kreisels zur Beschreibung der Drehung eines körperfesten Achsenkreuzes die Cayleyschen Parameter als brauchbar erkannt. Durch diese werden die Drehungen eines Achsenkreuzes im R_3 isomorph auf die Bewegungen eines Punktes im reellen R_4 abgebildet. Ganz entsprechend sind die Lorentztransformationen eines Vierbeins auf die Bewegungen eines Punktes in einem komplexen R_4 abbildbar. Bei dieser Transformation ergeben sich Fragen folgender Art. Mit einem physikalischen Objekt sei ein Vierervektor verknüpft. Welches sind die Cayleyschen Parameter eines mit dem physikalischen System festverbundenen Vierbeins, wenn der Vektor in diesem vorgegebene Koordinaten hat? Ähnliche Fragen werden vom Verf. diskutiert. Wenn man z. B. fordert, daß ein zeitartiger Vierervektor im lokalen Vierbein keine räumlichen Komponenten hat, so ergibt sich für die Cayleyschen Parameter eine Gleichung, die mit der für ebene Wellen geltenden algebraischen Form der Diracgleichung übereinstimmt. Wenn man die gleichen Betrachtungen infinitesimal durchführt, kann man auch die Diracsche Differentialgleichung ohne Feld ganz analog geometrisch verstehen. Für die Diracgleichung mit äußerem Feld kommt Verf. noch zu keinem abschließenden Ergebnis. *Bopp (Hechingen).*

Wet, J. S. de: Symmetric energy-momentum tensors in relativistic field theories. Proc. Cambridge philos. Soc. 43, 511—520 (1947).

Der Energie-Impuls-Tensor ist auf Grund des Energie-Impuls-Satzes nur bis auf die Divergenz eines schiefsymmetrischen Tensors dritter Stufe bestimmt. Man kann diesen stets so wählen, daß der Energie-Impuls-Tensor symmetrisch wird. Im Symmetriefall folgt sofort der Drehimpulssatz. Wenn man von dem die Feldgleichungen bestimmenden Variationsprinzip zur kanonischen Darstellung übergeht, erhält man in vielen Fällen nicht sofort die symmetrische Form des Tensors. Der Übergang vom kanonischen zum symmetrischen Energie-Impuls-Tensor ist unter Einschluß von Spinorfeldern von zahlreichen Autoren untersucht worden, vor allem von Belinfante. Die Transformation ist im allgemeinen wenig übersichtlich. Es ist darum bequem, daß man den symmetrischen Tensor für einfache Tensorfelder durch Ableitung der Lagrangefunktion nach dem metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ erhält. Dieses Ergebnis überträgt Verf. auf beliebige Tensorfelder, sogar auf solche, deren Lagrangefunktion höhere Ableitungen erhält. Es ist

$$I^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\nu\mu}} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\sigma}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\nu\mu,\sigma}} \right).$$

Wenn spinorielle Funktionen vorkommen, lassen sich die Belinfantischen Glieder nicht vermeiden. Das ist natürlich, da sie ein unmittelbarer Ausdruck des zusätzlichen Spindrehimpulses sind. *Bopp (Hechingen).*